Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

Wintersemester 2008/09

13. Übungsblatt zur VL Analysis III

Messbare Funktionen

Ergänzende Hinweise

4. Aufgabe (12 Punkte)

Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum. Sei weiterhin $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Borel-messbarer Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion.

a) Zeige, dass wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-f.ü. gegen f konvergiert, so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f auch dem Maße nach.

b) Zeige anhand eines Gegenbeispiels, dass die Umkehrung der Aussage aus a) falsch ist. *Anleitung:* Wähle $(\Omega, \Sigma, \mu) = ([0,1[, \mathcal{B}_0([0,1[, \lambda)$. Da zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau ein $p \neq 0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $\frac{(p-1)p}{2} \leq n < \frac{p(p+1)}{2}$ (darf vorausgestzt werden), setze $k = n - \frac{(p-1)p}{2}$. Wähle nun als Funktionenfolge $f_n := \chi_{[\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}[}$.

Hinweis zu b):
Die oben angegebene Anleitung zur Konstruktion eines Gegenbeispiels stellt nur eine Möglichkeit dar, es darf natürlich auch davon abgewichen werden. Eine alternative Anleitung zur Konstruktion eines Gegenbeispiels lautet wie folgt:

Wähle $(\Omega, \Sigma, \mu) = ([0,1], \mathcal{B}_0([0,1], \lambda)$.
Hierbei bezeichne $\mathcal{B}_0([0,1]) = \mathcal{B}_0(\mathbb{R}) \cap [0,1]$ die Borel-σ-Algebra von $[0,1]$ (d.h. also die Spur).
Setze $f_n := \chi_{I_n}$, wobei $I_n \subseteq [0,1]$ Intervalle sind, für die gilt:

(i) $\lambda(I_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$,

(ii) die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt für jedes $x \in [0,1]$ zwei Häufungspunkte.

Nach Konstruktion muss nun noch gezeigt werden, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwar dem Maße nach, aber nirgends auf $[0,1]$ punktweise (und somit nicht λ-f.ü.) konvergiert.

Dieser Aufgabenteil b) kann am Freitag, den 30.01. nachgereicht werden. Die Abgabe soll entweder in den Tutorien von David (10-12 bzw. 12-14 Uhr) oder während seiner Sprechstunde (14-16 Uhr) erfolgen.