Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

Wintersemester 2008/09

13. Übungsblatt zur VL Analysis III

Messbare Funktionen

Abgabe: 29.01.2009 **vor Beginn** der Übung

Übung

1. Aufgabe

Zeige, dass jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ messbar ist.

2. Aufgabe

Seien f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktionen. Beweise die folgenden Aussagen:

a) Sind f und g stetig, so ist $f = g$ λ-f.ü. genau dann, wenn $f = g$.

b) Es ist $f = g$ δ_0-f.ü. genau dann, wenn $f(0) = g(0)$. (δ_0 bezeichnet das Dirac-Maß bzgl. 0.)

3. Aufgabe

Beweise den folgenden sog. *Satz von Egorov*:

Satz 11.4.8: Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher (d.h. $\mu(\Omega) < \infty$), vollständiger Maßraum. Sei weiterhin $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Borel-messbarer Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, die μ-f.ü. gegen eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergieren. Dann gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, B \in \Sigma \text{ mit } \mu(\Omega \setminus B) < \varepsilon : \quad f_n \xrightarrow{n\to\infty} f \text{ gleichmäßig auf } B.$$

Zeige weiterhin anhand eines Gegenbeispiels, dass der Satz im Falle $\mu(\Omega) = \infty$ nicht gilt.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (6 Punkte)
Zeige, dass die folgenden Mengen σ-Algebren sind:

a)
$$\mathcal{A} = \{A \cup E \mid A \in B_0(\mathbb{R}),\ E \subseteq \{-\infty, \infty\}\} \subseteq \mathcal{P}(\overline{\mathbb{R}})$$
($\mathcal{A}$ heisst *Borel-σ-Algebra* über $\overline{\mathbb{R}}$.)

b)
$$\mathcal{A}_f = \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R})\} \subseteq \mathcal{P}(S),$$
wobei $S \neq \emptyset$ und $f : S \to \mathbb{R}$ eine Abbildung ist. Zeige weiterhin, dass $\mathcal{A}_f$ die kleinste σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf S ist, so dass die Abbildung $f : S \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-Borel-messbar ist.

2. Aufgabe (10 Punkte)
Sei $(S, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Beweise die folgenden Aussagen:

a) Sind $f, g : S \to \mathbb{R}$ Borel-messbare Funktionen, so sind die Mengen $\{f < g\}$, $\{f \leq g\}$, $\{f = g\}$ und $\{f \neq g\}$ $\mathcal{A}$-messbar.

b) Sei $A \in \mathcal{A}$ und $B \subset A$ mit $B \notin \mathcal{A}$. Dann ist die Funktion $f : S \to \mathbb{R}$, $f = \chi_B - \chi_{A \setminus B}$ selbst nicht messbar, aber ihr Betrag $|f|$ schon.

3. Aufgabe (12 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion. Zeige, dass der Graph von f eine Borelmenge im $\mathbb{R}^2$ ist. Gehe hierbei wie folgt vor:

a) Zeige, dass $A \times B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^2)$ für alle A, $B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R})$.

b) Zeige, dass die Funktionen
$$F,\, G : (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^2)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_0(\mathbb{R})), \quad F(x, y) = f(x), \quad G(x, y) = y$$
meßbar sind.

c) Zeige nun, dass $\operatorname{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^2)$.

4. Aufgabe (12 Punkte)
Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum. Sei weiterhin $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge Borel-messbarer Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Borel-messbare Funktion.

a) Zeige, dass wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-f.ü. gegen f konvergiert, so konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f auch dem Maße nach.

b) Zeige anhand eines Gegenbeispiels, dass die Umkehrung der Aussage aus a) falsch ist.
Anleitung: Wähle $(\Omega, \Sigma, \mu) = ([0, 1[, \mathcal{B}_0([0, 1[, \lambda)$. Da zu jedem $n \in \mathbb{N}$ genau ein $p \neq 0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $\frac{(p-1)p}{2} \leq n < \frac{p(p+1)}{2}$ (darf vorausgestzt werden), setze $k = n - \frac{(p-1)p}{2}$. Wähle nun als Funktionenfolge $f_n := \chi_{[\frac{k}{p}, \frac{k+1}{p}[}$.

(Gesamtpunktzahl: 40 Punkte)