Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

Wintersemester 2008/09

14. Übungsblatt zur VL Analysis III

Integration, Konvergenzsätze

Abgabe: 05.02.2009 **vor Beginn** der Übung

Lösungsskizze

2. Aufgabe (12 Punkte)

Sei (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum (d.h. μ sei σ-endlich) und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge meßbarer Funktionen $f_n : \Omega \to [0, \infty]$, die dem Maße nach gegen eine meßbare Funktion $f : \Omega \to [0, \infty]$ konvergiert. Zeige, dass dann gilt:

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis

Fall 1: $\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \infty$.
Dann folgt sofort

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \infty \geq \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu.$$

Fall 2: $\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \in [0, \infty)$.
Verfahre wie im Beweis zur 3. Übungsaufgabe b), also Beweis durch Widerspruch:
Angenommen, es sei

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu < \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu.$$

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu + \varepsilon \leq \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu.$$

Da die Folge $\left(\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten (durch 0) beschränkt ist, ist $\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu$ gerade ihr kleinster Häufungspunkt. Somit existiert eine Teilfolge $\left(\int_\Omega f_{n_k} \,\mathrm{d}\mu\right)_{k\in\mathbb{N}}$, die gegen $\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu$ konvergiert. Also gilt für fast alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_\Omega f_{n_k} \mathrm{d}\mu < \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu + \varepsilon \leq \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$$

Diese Teilfolge kann (abhängig von ε) so gewählt werden, dass ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\int_\Omega f_{n_k} \mathrm{d}\mu + \delta \leq \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \quad \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{*}$$

Betrachte nun die Folge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.
Da nach Voraussetzung $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem Maße nach gegen f konvergiert, konvergiert auch $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ dem Maße nach gegen f. Folglich existiert eine Teilfolge $(f_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ von $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{j\to\infty} f_{n_{k_j}}(x) = f(x) \quad \text{für } \mu\text{-fast alle } x \in \Omega.$$

Daher erhalten wir mit dem Lemma von Fatou:

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{j\to\infty} f_{n_{k_j}} \,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega f_{n_{k_j}} \,\mathrm{d}\mu.$$

Nach elementaren Eigenschaften der Limes Inferior[1] gilt für alle $\widetilde{\varepsilon} > 0$ und unendlich viele $j \in \mathbb{N}$:

$$\int_\Omega f_{n_{k_j}} \,\mathrm{d}\mu > \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega f_{n_{k_j}} \,\mathrm{d}\mu - \widetilde{\varepsilon},$$

also

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu < \int_\Omega f_{n_{k_j}} \,\mathrm{d}\mu + \widetilde{\varepsilon}.$$

Dies steht aber im Widerspruch zu (*) und somit ist die Behauptung bewiesen. □

Zusatzaufgabe (15 Punkte)

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge integrierbarer Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, die μ-fast überall gegen eine messbare Funktion $h : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert. Seien weiterhin eine integrierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gegeben, so dass

$$f \le f_n \quad \mu\text{-fast überall} \quad \text{und} \quad \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \le C \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Beweise die folgenden Aussagen:

a) Es existiert eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ integrierbarer Funktionen $g_n : \Omega \to \mathbb{R}$ und eine integrierbare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

   (i) Es gilt für μ-fast überall $f_n = g_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und μ-fast überall $f = g$

   (ii) $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = h(x)$ für alle $x \in \Omega$

   (iii) $g \le g_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) h ist integrierbar.

Beweis

a) Nach Voraussetzung existieren $A, A_n \in \Sigma$ mit $\mu(A) = \mu(A_n) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = h(x) \quad \forall\, x \in \Omega \setminus A \quad \text{und} \quad f(x) \le f_n(x) \quad \forall\, x \in \Omega \setminus A_n.$$

Setze $B := A \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$. Dann ist offensichtlich $B \in \Sigma$ mit $\mu(B) = 0$ wegen

$$0 \le \mu(B) \le \mu(A) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = 0.$$

Da $\Omega \setminus B \subseteq \Omega \setminus A$ und $\Omega \setminus B \subseteq \Omega \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, erhalten wir

$$\forall\, x \in \Omega \setminus B: \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = h(x) \quad \text{und} \quad f(x) \le f_n(x) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{**}$$

Setze nun

$$g_n := f_n \chi_{\Omega\setminus B} + h\chi_B \quad \text{und} \quad g := f\chi_{\Omega\setminus B} + h\chi_B.$$

[1] $a = \liminf_{n\to\infty} a_n$ genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ gilt:
$a_n \in]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ und $a_n < a - \varepsilon$ für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Da $\mu(B) = 0$, erhalten wir mit der Integrierbarkeit von f_n und f auch die Integrierbarkeit von g_n und g durch:

$$\int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega\setminus B} f_n \,\mathrm{d}\mu < \infty \quad \text{und} \quad \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu = \int_{\Omega\setminus B} f \,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Zeige nun noch, dass die so konstruierten Abbildungen g_n und g die geforderten Eigenschaften (i)-(iii) erfüllen.
(i): Für alle $x \in \Omega \setminus B$ gilt offensichtlich $g_n(x) = f_n(x)$ und $g(x) = f(x)$.
(iii)+(ii): Ist $x \in B$, so erhalten wir

$$g_n(x) = h(x) = g(x) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = h(x).$$

Im Falle $x \in \Omega \setminus B$ folgt mit (**)

$$g_n(x) = f_n(x) \leq f(x) = g(x) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

b) Verwende g_n und g wie in a) und betrachte die Folge $(g_n - g)_{n\in\mathbb{N}}$ integrierbarer Funktionen. Nach (ii) konvergiert $(g_n - g)_{n\in\mathbb{N}}$ auf ganz Ω punktweise gegen die messbare Funktion $h - g$. Da nach (iii) $g_n - g \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt also auch $h - g \geq 0$ und wir können das Lemma von Fatou anwenden:

$$\int_\Omega h - g \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} g_n - g \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega g_n - g \,\mathrm{d}\mu.$$

Mit der Integrierbarkeit von g und (i) erhalten wir wegen $\int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \leq C$:

$$\int_\Omega h - g \,\mathrm{d}\mu \leq C - \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Also ist $h - g$ integrierbar und somit auch $h = h - g + g$.

$\square$