Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

Wintersemester 2008/09

14. Übungsblatt zur VL Analysis III

Integration, Konvergenzsätze

Abgabe: 05.02.2009 **vor Beginn** der Übung

Dies ist das letzte Übungsblatt des Semesters!

Übung

1. Aufgabe

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine integrierbare Funktion.
Beweise die folgenden Aussagen:

a) Für alle $E \in \Sigma$ folgt aus $\int_E |f| \, \mathrm{d}\mu = 0$ stets $f = 0$ μ-fast überall auf E.

b) Für festes $x \in \Omega$ gilt für das Dirac-Maß ∂_x: $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\partial_x = f(x)$.

2. Aufgabe (Satz von Scheffé)

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge integrierbarer Funktionen $f_n : \Omega \to [0, \infty]$, die μ-fast überall gegen eine integrierbare Funktion $f : \Omega \to [0, \infty]$ konvergiert. Beweise die folgende Implikation:

$$\int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \quad \Longrightarrow \quad \int_\Omega |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

3. Aufgabe

Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge meßbarer Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, die dem Maße nach gegen eine meßbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert.
Beweise die folgenden Aussagen:

a) Es existiert eine Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die μ-fast überall gegen f konvergiert.

b) Ist f_n für alle $n \in \mathbb{N}$ integrierbar und existiert eine integrierbare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}$ mit μ-fast überall $|f_n| \leq g$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch f integrierbar und es gilt

$$\int_\Omega |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{und} \quad \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu \xrightarrow{n\to\infty} \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu.$$

Hausaufgaben

1. Aufgabe (12 Punkte)
Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ integrierbar. Beweise die folgenden Aussagen:

a) Es ist genau dann μ-fast überall $f \geq 0$, wenn $\int_A f \,\mathrm{d}\mu \geq 0$ für alle $A \in \Sigma$.

b) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) < \infty$, so dass

$$\left| \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu - \int_B f \,\mathrm{d}\mu \right| < \varepsilon \quad \forall B \in \Sigma \text{ mit } A \subseteq B.$$

2. Aufgabe (12 Punkte)
Sei (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum (d.h. μ sei σ-endlich) und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge meßbarer Funktionen $f_n : \Omega \to [0, \infty]$, die dem Maße nach gegen eine meßbare Funktion $f : \Omega \to [0, \infty]$ konvergiert. Zeige, dass dann gilt:

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

3. Aufgabe (16 Punkte)
Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge integrierbarer Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $\sum_{n=1}^\infty \int_\Omega |f_n| \,\mathrm{d}\mu < \infty$. Zeige mit Hilfe des Lebesgue'schen Konvergenzsatzes, dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ μ-fast überall gegen eine integrierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert und es gilt

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Zusatzaufgabe (15 Punkte)
Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge integrierbarer Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, die μ-fast überall gegen eine messbare Funktion $h : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert. Seien weiterhin eine integrierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ und eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ gegeben, so dass

$$f \leq f_n \quad \mu\text{-fast überall} \quad \text{und} \quad \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \leq C \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Beweise die folgenden Aussagen:

a) Es existiert eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ integrierbarer Funktionen $g_n : \Omega \to \mathbb{R}$ und eine integrierbare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

   (i) Es gilt für μ-fast überall $f_n = g_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und μ-fast überall $f = g$

   (ii) $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = h(x)$ für alle $x \in \Omega$

   (iii) $g \leq g_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) h ist integrierbar.

(Gesamtpunktzahl: 40+15 Punkte)