Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
Wintersemester 2008/09
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/`

15. Übungsblatt zur VL Analysis III

Wiederholung

Lösungsskizze

4. Aufgabe
Zeige mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf, dass das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + y^2 x - y^3, \quad y(0) = 0$$

genau eine Lösung auf dem Intervall $[-1/3, 1/3]$ besitzt.

Beweis
Da die Funktion $f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2 x - y^3$ stetig nach y differenzierbar ist und $\frac{\partial f}{\partial y}$ auf $[-1,1] \times [-1,1]$ beschränkt ist, folgt mit dem MWS die (lokale) Lipschitz-Stetigkeit von f bzgl. y. Nach dem Satz von Picard-Lindelöf (lokale Version) existiert somit eine eindeutige Lösung des AWP auf einem Intervall $[-\alpha, \alpha]$.
Zeige nun noch, dass $\alpha = 1/3$.
Es gilt $\alpha = \min\{1, 1/M\}$, wobei $M = \max_{(x,y)\in[-1,1]\times[-1,1]} |f(x,y)|$. Wegen

$$|f(x,y)| = |x^2 + y^2 x - y^3| \leq |x^2| + |y^2 x| + |y^3| \leq 3 \quad \text{für alle } x, y \in [-1,1],$$

erhalten wir zunächst $M \leq 3$. Da aufgrund der Stetigkeit von f und der Kompaktheit von $[-1,1] \times [-1,1]$ das Maximum M tatsächlich angenommen wird und $f(1,-1) = 3$ gilt, folgt $M = 3$. Wir erhalten somit $\alpha = \min\{1, 1/3\} = 1/3$. $\square$