Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
PROF. DR. P. WITTBOLD
MARTHA HUBSKI
Wintersemester 2008/09
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

15. Übungsblatt zur VL Analysis III

Wiederholung

DIESES ÜBUNGSBLATT SOLL NICHT ABGEGEBEN WERDEN!

Die hier gestellten Aufgaben dienen nur Wiederholungszwecken und erlauben keine Rückschlüsse auf die Klausuraufgaben. Nähere Informationen zur Klausur findet ihr auf unserer Homepage.

---

1. Aufgabe

Bestimme die Extrema der Funktion $f(x, y, z) = xyz$ auf der Ebene

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 1\}.$$

2. Aufgabe

Bestimme alle Punkte der Kugeloberfläche

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

die zum Punkt $(1, 2, 1)$ (bzw. $(1, 1, 1)$) den kleinsten Abstand haben.

3. Aufgabe

Löse die folgenden Anfangswertprobleme mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} y' = \frac{x}{y}, \\ y(1) = 0 \end{cases} \qquad \text{b)} \quad \begin{cases} \frac{y'}{x \sin x} + \frac{1}{y} = 0, \\ y(\pi/2) = -1 \end{cases} \qquad \text{c)} \quad \begin{cases} xy' - \frac{y}{x+1} = 0, \\ y(2) = 1. \end{cases}$$

4. Aufgabe

Zeige mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf, dass das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 + y^2 x - y^3, \quad y(0) = 0$$

genau eine Lösung auf dem Intervall $[-1/3, 1/3]$ besitzt.

5. Aufgabe

Gegeben sei das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = (y, x - y)$$

und der Weg

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

Zeige, dass F ein Gradientenfeld ist und bestimme ein Potential von F. Berechne das Wegintegral von F längs des Weges γ.

6. Aufgabe
Sei $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung und

$$F : \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^n, \quad F(x) = \varphi(\|x\|)x$$

ein Vektorfeld. Weiterhin sei ein Weg gegeben durch

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ t^4 \\ t^6 \\ \vdots \\ t^{2n} \end{pmatrix}, \quad t \in [-1,1].$$

Bestimme das Wegintegral $\int_\gamma F \, \mathrm{d}x$.

7. Aufgabe
Berechne das Oberflächenintegral $\int_S F \, \mathrm{d}\sigma$ des Vektorfeldes

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x,y,z) = (2z, x+y, 0)$$

über die Sphäre

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2\} \quad (r > 0).$$

8. Aufgabe
Berechne das Volumen des Körpers

$$T = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq x + \frac{1}{2} \right\}.$$

9. Aufgabe
Sei $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v(x,y) = \binom{x-y}{xy}$ und D dasjenige Dreieck im $\mathbb{R}^3$, das die Eckpunkte $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,3)$ besitzt. Berechne das Wegintegral $\int_{\partial B} v \, \mathrm{d}(x,y)$ einmal direkt und einmal mit Hilfe des Satzes von Gauß-Green in der Ebene.

10. Aufgabe
Gegeben sei das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

und der Körper

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1,\ 0 \leq z \leq c \right\} \quad (c > 0).$$

Berechne das Volumenintegral $\int_M \mathrm{rot} f \, \mathrm{d}(x,y,z)$ einmal direkt und einmal mit Hilfe des Gaußchen Integralsatzes.

11. Aufgabe
Verifiziere den Stokeschen Integralsatz anhand des Vektorfeldes

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix}$$

und des Körpers

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2 - 4,\ z \leq 0\}.$$

Hinweis: Verwende die verallgemeinerten Zylinderkoordinaten $(r, \phi, z) \mapsto (ar\cos\phi, br\sin\phi, z)$.

12. Aufgabe
Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, (B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien Folgen meßbarer Mengen mit $B_n \subseteq A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann gilt:

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) - \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) - \mu(B_n).$$

13. Aufgabe
Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ derart, dass $\mu(A_n) = \mu(\Omega) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann

$$\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \mu(\Omega).$$

14. Aufgabe
Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $(\Omega, \overline{\Sigma}, \overline{\mu})$ seine Vervollständigung. Zeige, dass eine Funktion $f :, \overline{\Sigma} \to \mathbb{R}$ genau dann $\overline{\mu}$-integrierbar ist, wenn eine μ-integrierbare Funktion $g : \Omega \to \mathbb{R}$ existiert mit μ-fast überall $f = g$. In diesem Fall gilt

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\overline{\mu} = \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu.$$

15. Aufgabe
Beweise oder widerlege die folgende Aussage:
Betrachte den Maßraum $([0,1], \mathcal{B}_0([0,1]), \lambda)$. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge integrierbarer Funktionen $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, die λ-fast überall gegen eine integrierbare Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert. Weiterhin gelte:

$$\exists\, C \in \mathbb{R}^+ : \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{[0,1]} |f_n| \,\mathrm{d}\lambda \leq C.$$

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[0,1]} f \,\mathrm{d}\lambda.$$

16. Aufgabe
Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion. Zeige, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) < \infty$ existiert, so dass:

$$\sup_{x\in A} |f(x)| < \infty \quad \text{und} \quad \int_{\Omega\setminus A} |f| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Hinweis: Betrachte die Mengen $A_n := \{x \in \Omega \mid \frac{1}{n} \leq |f(x)| \leq n\}$ *für* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

17. Aufgabe
Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Funktionenfolgen, gegeben durch

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \text{ oder } x \geq \frac{2}{n}, \\ n & \text{für } x = \frac{1}{n}, \\ n^2 x & \text{für } x \in \left]0, \frac{1}{n}\right[, \\ -n^2 x + 2n & \text{für } x \in \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[. \end{cases}$$

und

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \text{ oder } x \geq \frac{2}{n}, \\ 1 & \text{für } x = \frac{1}{n}, \\ nx & \text{für } x \in \left]0, \frac{1}{n}\right[, \\ -nx + 2 & \text{für } x \in \left]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right[. \end{cases}$$

Beweise die folgenden Aussagen:

a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) $\int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Warum ist der Lebesguesche Konvergenzsatz hier nicht anwendbar?

c) $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n \,\mathrm{d}\lambda = 0$.
Warum kann der Lebesguesche Konvergenzsatz in diesem Fall angewendet werden?

18. Aufgabe
Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion mit $f > 0$ auf Σ.
Beweise die folgenden Aussagen:

a) Ist $\mu(\Omega) < \infty$, so gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0 \quad \forall\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma \text{ mit } \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

b) Ist $(\Omega, \Sigma, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_0(\mathbb{R}), \lambda)$ und f integrierbar, so gilt:

$$\exists\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}_0(\mathbb{R}) \text{ mit } \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f \,\mathrm{d}\lambda = 0 : \quad \lim_{n\to\infty} \lambda(A_n) \neq 0.$$

Abschluss-Umtrunk

Zum Semesterende und nach hoffentlich gut überstandener Klausur findet ein letzter Umtrunk unseres Analysis-Zyklusses statt, und zwar

am Freitag, den 13. Februar ab 18 Uhr im Mathe-Café (MA 844).

Wie immer sind Getränke prinzipiell selbst mitzubringen oder mit Marken vom Mathe-Café zu erstehen. Vielen Dank an Richard für die Organisation.
