Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

Wintersemester 2008/09

12. Übungsblatt zur VL Analysis III

Lebesguemaß

Nachtrag zur Übung vom 15.01.2009

---

1. Aufgabe

2. Aufgabe
Beweise die folgenden Eigenschaften des Lebesguemaßes:

b) (innere Regularität)
Für jede Borelmenge $A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$ gilt

$$\lambda^N(A) = \sup\{\lambda^N(K) \mid K \subseteq A,\, K \text{ kompakt}\}.$$

Beweis.
„$\geq$" folgt sofort aus der Monotonie des Lebesgue-Maßes:

$$A \supseteq K \;\Rightarrow\; \lambda^N(A) \geq \lambda^N(K) \quad \text{und somit} \quad \lambda^N(A) \geq \sup\{\lambda^N(K) \mid K \subseteq A,\, K \text{ kompakt}\}.$$

„$\leq$" Betrachte zunächst nur beschränkte Borelmengen:
<u>Fall 1:</u> Sei $A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$ beschränkt.
Dann existiert eine kompakte Menge $K_0 \subseteq \mathbb{R}^N$ mit $A \subseteq K_0$.
Da $K_0 \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$ (nach Satz 11.1.5), ist auch $K_0 \setminus A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$. Somit existiert (wie im Beweis für die äußere Regularität) zu jedem $\varepsilon > 0$ eine offene Menge $O \subseteq \mathbb{R}^N$ mit $K_0 \setminus A \subseteq O$ und

$$\lambda^N(O) < \lambda^N(K_0 \setminus A) + \varepsilon. \tag{1}$$

Setze $K := K_0 \setminus O$.
Es gilt $K = K_0 \setminus O \subseteq K_0 \setminus (K_0 \setminus A) = A$. Desweiteren ist K kompakt, da $K = K_0 \cap (\mathbb{R}^N \setminus O)$ als Schnitt zweier abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist und daher als Teilmenge der kompakten Menge K_0 selbst wieder kompakt ist.
Da A, $O \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$ (wegen Satz 11.1.5) und Borel-Mengen stets Lebesgue-meßbar sind, gilt nach Definiton 11.3.2 für alle $D \subseteq \mathbb{R}^N$:

$$\lambda^N(D) = \lambda^N(A \cap D) + \lambda^N(D \setminus A) \quad \text{und} \quad \lambda^N(D) = \lambda^N(O \cap D) + \lambda^N(D \setminus O).$$

Also erhalten wir insbesondere für $D = K_0$:

$$\begin{aligned} \lambda^N(K_0) &= \lambda^N(A \cap K_0) + \lambda^N(K_0 \setminus A) = \lambda^N(A) + \lambda^N(K_0 \setminus A), \\ \lambda^N(K_0) &= \lambda^N(O \cap K_0) + \lambda^N(K_0 \setminus O) = \lambda^N(O \cap K_0) + \lambda^N(K). \end{aligned}$$

Mit $O \cap K_0 \subseteq O$ und (1) folgt daraus

$$\begin{aligned}\lambda^N(K_0) &= \lambda^N(O \cap K_0) + \lambda^N(K)\\ &\leq \lambda^N(O) + \lambda^N(K)\\ &< \lambda^N(K_0 \setminus A) + \varepsilon + \lambda^N(K)\\ &= \lambda^N(K_0) - \lambda^N(A) + \varepsilon + \lambda^N(K).\end{aligned}$$

Somit also

$$\lambda^N(A) < \lambda^N(K) + \varepsilon$$

und folglich

$$\lambda^N(A) \leq \sup\{\lambda^N(K) \mid K \subseteq A,\, K \text{ kompakt}\}.$$

Fall 2: Sei nun $A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$ beliebig.
Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ setze

$$A_n := A \cap B_n(0) \quad \text{mit } B_n(0) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \|x\| < n\}.$$

Da $A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$ und $B_n(0)$ als offene Menge stets in $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$ liegt, gilt auch $A \cap B_n(0) \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$.
Wegen $A_n \subseteq B_r(0)$ ist A_n beschränkt und wir können Fall 1 auf A_n anwenden und erhalten:

$$\begin{aligned}\lambda^N(A_n) &\leq \sup\{\lambda^N(K) \mid K \subseteq A_n,\, K \text{ kompakt}\}\\ &\leq \sup\{\lambda^N(K) \mid K \subseteq A,\, K \text{ kompakt}\}.\end{aligned}$$

Wegen $\lambda^N(A_n) \xrightarrow{n \to \infty} \lambda^N(A)$ ergibt sich nun unmittelbar die gewünschte Aussage

$$\lambda^N(A) \leq \sup\{\lambda^N(K) \mid K \subseteq A,\, K \text{ kompakt}\}.$$

3. Aufgabe
Zeige, dass Mengen existieren, die nicht Borel- bzw. Lebesgue-messbar sind, d.h. es gilt

$$\mathcal{B}_N := \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{L}_N := \mathcal{M}_{(\lambda^N)^*} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N).$$

Beweis.
Zeige: $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N) \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ für alle $N \in \mathbb{N}$.
Betrachte auf $\mathbb{R}^N$ die folgende Äquivalenzrelation:

$$x \sim y \quad \Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}^N.$$

Der Raum $\mathbb{R}^N$ zerfällt unter dieser Äquivalenzrelation in disjunkte Äquivalenzklassen der Form $x + \mathbb{Q}^N = [x]_\sim = \{y \in \mathbb{R}^N \mid x - y \in \mathbb{Q}^N\}$.
Da zu jeder reellen Zahl $x_i \in \mathbb{R}$ ein $p_i \in \mathbb{Z}$ mit $p_i \leq x_i < p_i + 1$ (d.h. mit $x_i - p_i \in [0, 1[$) existiert, gibt es in jeder dieser Äquivalenzklassen einen Punkt aus $[0, 1[^N$.
Nach dem Auswahlaxiom[1] der Mengenlehre existiert folglich eine Menge $K \subseteq [0, 1[^N$, die mit jeder Äquivalenzklasse genau ein Element gemeinsam hat. Daher gilt

$$\mathbb{R}^N = \bigcup_{k \in K} (k + \mathbb{Q}^N) = \bigcup_{y \in \mathbb{Q}^N} (y + K).$$

Dieses ist eine disjunkte Zerlegung, d.h. es gilt für alle y_1, $y_2 \in \mathbb{Q}^N$:

$$y_1 \neq y_2 \quad \Longrightarrow \quad y_1 + K \cap y_1 + K = \emptyset.$$

[1]Das Auswahlaxiom besagt: Ist $M \neq \emptyset$ eine Menge von nichtleeren Mengen, so existiert eine Funktion $F : M \to \bigcup_{A \in M} A$ mit $f(A) \in A$ für alle $A \in M$.

Andernfalls würden k_1, $k_2 \in K$ existieren mit $y_1 + k_1 = y_2 + k_2$. Dies impliziert aber, dass $k_1 \sim k_2$ und da K genau ein Element jeder Äquivalenzklasse enthält, muss $y_1 = y_2$ sein.
Wir wollen nun mittels eines Widerspruchbeweises zeigen, dass K keine Borelmenge ist.
Angenommen, es gilt $K \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$. Dann ist K Lebesgue-meßbar und aufgrund der Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}^N$ folgt mit der σ-Additivität von λ^N:

$$\sum_{y\in\mathbb{Q}^N} \lambda^N(y+K) = \lambda^N\left(\bigcup_{y\in\mathbb{Q}^N}(y+K)\right) = \lambda^N(\mathbb{R}^N) = \infty. \tag{2}$$

Betrachten wir nur diejenigen $y \in \mathbb{Q}^N$, die wie K im Quader $[0,1[^N$ liegen, so erhalten wir

$$\bigcup_{y\in[0,1[^N\cap\mathbb{Q}^N}(y+K) \subseteq [0,2[^N$$

und folglich die Abschätzung

$$\sum_{y\in[0,1[^N\cap\mathbb{Q}^N} \lambda^N(y+K) = \lambda^N\left(\bigcup_{y\in[0,1[^N\cap\mathbb{Q}^N}(y+K)\right) \leq \lambda^N([0,2[^N) = 2^N < \infty. \tag{3}$$

Da das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$ translationsinvariant ist (siehe 2. ÜA a)), gilt $\lambda^N(y+K) = \lambda^N(K)$ für jedes $y \in \mathbb{Q}^N$. Somit erhalten wir mit (3)

$$\sum_{y\in[0,1[^N\cap\mathbb{Q}^N} \lambda^N(K) = \sum_{y\in[0,1[^N\cap\mathbb{Q}^N} \lambda^N(y+K) < \infty \quad \Longrightarrow \quad \lambda^N(K) = 0.$$

Eingesetzt in (2) ergibt sich daraus nun der gewünschte Widerspruch

$$0 = \sum_{y\in\mathbb{Q}^N} \lambda^N(K) = \sum_{y\in\mathbb{Q}^N} \lambda^N(y+K) = \infty$$

und folglich kann K keine Borelmenge gewesen sein!

Anmerkung: Der Beweis von $\mathcal{L}_N := \mathcal{M}_{(\lambda^N)^*} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ läuft gänzlich analog, wenn man vorher zeigt, dass das Lebesgue-Maß nicht nur auf $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$, sondern sogar auf ganz $\mathcal{M}_{(\lambda^N)^*}$ translationsinvariant ist. Dieses folgt aber leicht aus der Aussage der 2. Hausaufgabe.
Man kann sogar zeigen, dass jede Menge $A \subseteq \mathbb{R}^N$ mit $\lambda^N(A) > 0$ (d.h. jede Nicht-Nullmenge) eine nicht Lebesgue-meßbare Teilmenge $B \subseteq A$, $B \notin \mathcal{L}_N$ enthält. Der Beweis hierfür steht z.B. in Elstrodt, „Maß- und Integrationstheorie". Dort finden sich auch weitere Beispiele nicht Lebesgue-meßbarer Mengen (Kap.3, Paragraph 3: Existenz nicht meßbarer Mengen).