Bausteine für Beweise [1]

Schlüsselworte

Aber einen gut geschriebenen Beweis erkennt man an verschiedenen Bausteinen, die jeweils mit **Schüsselworten** gekennzeichnet sind. Diese Schlüsselworte geben dem Beweis Struktur. Sie helfen dem damit vertrauten Leser – und sie helfen dem Schreiber oder Sucher von Beweisen. Wie, das werden wir im Einzelnen noch sehen. Ein Ziel der Linearen Algebra ist es, dass ihr einfache Beweise, unter sinnvoller Verwendung der Schlüsselworte, finden und aufschreiben könnt. Die „Bausteine für Beweise“ sollen euch dabei helfen.

Es folgen einige Schüsselworte, die aber auch durch alle Formulierungen, die genau dasselbe bedeuten, ersetzt werden können.

- **Sei, Seien, Gelte, Bezeichne** und andere „Konjunktiv I“-Formen. Sie sind zwar im allgemeinen Sprachgebrauch aus der Mode geraten, werden aber in Beweisen häufig benutzt. Sie *kennzeichnen Voraussetzungen* – sei es für eine Zeile oder für ein gesamtes Buch. Voraussetzungen stecken den Rahmen ab, in dem sich eine Definition, ein Satz oder eine Übungsaufgabe bewegen. Danach weiß jeder Leser, was mit einem Buchstaben gemeint ist.
- **Dann, Also, Daher, Deshalb** Diese Worte kennzeichnen *Folgerungen* aus dem *direkt vorangehenden* Satz.
- **Weil, Wegen, Da, Denn** Benötigt die Folgerung mit „Dann“ (Also, Daher, Deshalb …) nicht nur die Information aus dem vorangehenden Satz als *Begründung*, so sollte man „nicht selbstverständliche“ noch eingehende Informationen mit einem dieser Schlüsselworte gekennzeichnet mit angeben. Hierbei ist eine gute Faustregel lieber einmal zu oft eine Begründung anzugeben, da man nicht genau wissen kann, was der Leser (bei euch der korrigiernde Tutor) als selbstverständlich ansieht.
- **Wie gewünscht, q.e.d,** $\square$
  Kennzeichnung des *Beweisendes*.

Darauf, wie diese und weitere Schlüsselworte zusammenwirken, um einen Standardbeweis zu führen, werde ich in der Übung immer wieder eingehen und nach und nach in den „Bausteinen“ zusammenfassen. Wir fangen mit Implikationen an.

Implikation

Eine Aussage der Form $P \Rightarrow Q$ (**Implikation**) soll gezeigt werden.
Viele Sätze sind von dieser Form. Dazu gehören auch **Äquivalenzen** ($P \Leftrightarrow Q$, „P genau dann, wenn Q“), weil das nur eine Kurzform für die beiden Implikationen $P \Rightarrow Q$ und $Q \Rightarrow P$ ist. Ebenso muss man zum Nachweis einer **Teilmengenbeziehung** $A \subseteq B$, zeigen, dass $x \in A \Rightarrow x \in B$. Und zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Direkter Beweis

Satz: Seien A und B Mengen, $B_1, B_2 \subseteq B$ und $f : A \to B$ eine Abbildung. *(Voraussetzungen)*
Es gilt $B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$. *(eigentliche Aussage)*

Die erste Möglichkeit einen solchen Beweis zu führen ist der **direkte Beweis**. Dazu wird P *vorausgesetzt*. Dann wird *von Zeile zu Zeile* argumentiert bis man bei Q angelangt ist. Das liest sich dann so:

Beweis:
(Die Voraussetzungen des Satzes gelten auch für den Beweis und müssen nicht wiederholt werden.)
Sei $B_1 \subseteq B_2$. *(Voraussetzung „$\Rightarrow$“)*
Sei weiter $x \in f^{-1}(B_1)$. *(Voraussetzung „$\subseteq$“)*
Dann gilt nach Definition von $f^{-1}(B_1)$, dass $f(x) \in B_1$.
Weil $B_1 \subseteq B_2$, gilt **damit** auch $f(x) \in B_2$ und nach Def. $x \in f^{-1}(B_2)$. *(„$\subseteq$“gezeigt)*
Also gilt insgesamt $f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2)$ $\square$

Tipp: Achtet in der nächsten Zeit einmal darauf, wo ihr die Schlüsselworte überall wieder findet!

[1] Erstellt von Dagmar Timmreck

Indirekter Beweis und Widerspruchsbeweis

Außer dem direkten Beweis, gibt es zwei weitere Möglichkeiten einen solchen Beweis zu führen:

- die *indirekte Methode* und den
- Widerspruchsbeweis.

Beide Beweismethoden haben gemeinsam, dass man mit „negierten Aussagen“ argumentiert. Sie unterscheiden sich jedoch in dem, was gezeigt wird.

- Beim *indirekten Beweis* wird die zu $A \Rightarrow B$ äquvalente Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$, die sogenannte *Kontraposition* gezeigt.

  Satz 1: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade ist, ist auch n gerade.
  Beweis: Wir beweisen die Kontraposition. *Hinweis auf die Beweismethode*
  zu zeigen ist also: n *ungerade* $\Rightarrow n^2$ *ungerade*
  Sei also n ungerade. *Voraussetzung* $\neg B$
  Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $n = 2k - 1$ *Definition ungerade*
  und damit ist

  $$n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2\underbrace{(2k^2 - 2k)}_{\in\mathbb{N}}+1$$

  auch ungerade. $\neg A$ *bewiesen*
  Damit ist die Kontraposition der Aussage bewiesen, also auch die Aussage selbst. □

- Beim *Widerspruchsbeweis* schießt man gewissermaßen „von hinten durch die Brust ins Auge“: Man nimmt erst einmal etwas an und zeigt dann, dass daran etwas nicht stimmen kann. Genauer: Man zeigt, dass die –zu $\neg(A \Rightarrow B)$ äquivalente– Aussage $A \wedge \neg B$, auf einen Widerspruch führt und deshalb nicht gelten kann.
  Das klassische Beispiel für einen Widerspruchsbeweis ist allerdings keine Implikation, sondern der folgende Satz.

  Satz 2: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
  Beweis: Wir führen einen Widerspruchsbeweis.
  Widerspruchsannahme: $\sqrt{2}$ ist darstellbar als $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ mit *teilerfremden* $m, n \in \mathbb{N}$.
  Daraus folgt $2n^2 = m^2$.
  Also ist m^2 gerade und nach Satz 1 ist auch m gerade.
  Schreibe also $m = 2\tilde{m}$.
  Dann gilt $2n^2 = (2\tilde{m})^2 = 4\tilde{m}^2$ und damit $n^2 = 2\tilde{m}^2$.
  Also ist auch n^2 gerade und nach Satz 1 ist auch n gerade.
  Damit ist 2 ein gemeinsamer Teiler von m und n. *Widerspruch!*

Bemerkung: Wenn ihr einen Widerspruchsbeweis geführt habt und der Widerspruch sich daraus ergibt, dass ihr $\neg A$ gezeigt habt, schaut noch einmal genau hin. Meistens habt ihr dann schon einen indirekten Beweis geführt. Nämlich dann, wenn ihr die Voraussetzung $\neg A$ gar nicht benutzt habt. Was euch das bringt? Ihr habt die Kontraposition direkt gezeigt, und wisst also, **warum** sie gilt, und nicht nur, dass es sonst einen Widerspruch gibt.

Quantoren

1. **Allquantoren** $\forall$

   Mit Allquantoren geht man so ähnlich um, wie mit Implikationen.

   - Form: $\forall x \in M : x$ hat die Eigenschaft P.
     Dabei kann P selbst wieder eine Aussage mit Quantoren sein ...
   - Lesen: Für alle, Für jedes, Zu jedem
   - Beweismöglichkeiten:
     - endliche Menge: alle Elemente nacheinander behandeln

  - beliebige Menge: Wie beim direkten Beweis einer Implikation.
    Man zeigt: $x \in M \implies x$ hat die Eigenschaft P.
- Benutzen: Die Eigenschaft P darf benutzt werden, wenn x die Voraussetzungen erfüllt.

2. **Existenzquantoren** $\exists$
   - Form: $\exists x \in M : x$ hat die Eigenschaft P.
   - Lesen: Es gibt (mindestens) ein, Es existiert
   - Beweis:
     - Aus dem, was man bis dahin hat, muss man ein Objekt x bauen und dann nachweisen, dass x wirklich ein Element von M ist und die Eigenschaft P hat. Oft ist einer dieser beiden Nachweise sehr einfach, da x entsprechend konstruiert ist.
     - Schlüsselworte: Setze, Definiere, :=
   - Benutzen:
     - Wir dürfen **ein** Objekt mit den entsprechenden Eigenschaften benutzen. Dies passiert häufig dadurch, dass man eine Bezeichnung für solch ein Objekt einführt.
     - Schlüsselworte: Also gibt es, Sei also, Bezeiche, Schreibe,

3. **Beispiel** Das Beispiel ist wieder so einfach gewählt, dass man sich beim Nachvollziehen ganz auf die Struktur konzentrieren kann.

   Nachweis, dass $(\mathbb{C}, +)$ eine Gruppe ist. Wir benutzen dabei die beiden Definitionen:

   $$\mathbb{C} := \{a + b\mathbf{i} \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{c \mid \exists a, b \in \mathbb{R} : c = a + b\mathbf{i}\}$$

   und für $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ setze

   $$(a_1 + b_1\mathbf{i}) + (a_2 + b_2\mathbf{i}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathbf{i}$$

   sowie die üblichen Bezeichnungen 0 für das neutrale Element von $(\mathbb{R}, +)$ und $-a$ für das zu $a \in \mathbb{R}$ inverse Element.

   (a) Assoziativgesetz:
   Zu zeigen:
   $$\forall c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C} : (c_1 + c_2) + c_3 = c_1 + (c_2 + c_3)$$
   Seien $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$. *Voraussetzung des Beweises der Allaussage*
   Schreibe $c_k = a_k + b_k\mathbf{i}$, mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ für $k = 1, 2, 3$. *Einsetzen der Def.*

   Dann gilt einerseits: *Beweis der Kernbehauptung durch „Ausrechnen“*

   $$\begin{aligned} (c_1 + c_2) + c_3 &= ((a_1 + b_1\mathbf{i}) + (a_2 + b_2\mathbf{i})) + (a_3 + b_3\mathbf{i}) \\ &= ((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\mathbf{i}) + (a_3 + b_3\mathbf{i}) \\ &= ((a_1 + a_2) + a_3) + ((b_1 + b_2) + b_3)\mathbf{i} \end{aligned}$$

   und andererseits

   $$\begin{aligned} c_1 + (c_2 + c_3) &= (a_1 + b_1\mathbf{i}) + ((a_2 + b_2\mathbf{i}) + (a_3 + b_3\mathbf{i})) \\ &= (a_1 + b_1\mathbf{i}) + ((a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)\mathbf{i}) \\ &= (a_1 + (a_2 + a_3)) + (b_1 + (b_2 + b_3))\mathbf{i} \\ &= ((a_1 + a_2) + a_3) + ((b_1 + b_2) + b_3)\mathbf{i} \end{aligned}$$

   jeweils nach Definition der Verknüpfung und weil die Addition in $\mathbb{R}$ assoziativ ist.
   Also gilt insgesamt $(c_1 + c_2) + c_3 = c_1 + (c_2 + c_3)$. *Kernbeh. gezeigt.*
   Weil wir keine Einschränkungen an $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ gemacht haben, gilt das Ergebnis für alle $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$. *(Dieser Satz fasst noch einmal zusammen, dass wir die Allaussage wirklich gezeigt haben. Er wird meistens weggelassen.)*

(b) Neutrales Element:
Zu zeigen:

$$\exists e \in \mathbb{C} \forall c \in \mathbb{C} : e + c = c$$

Setze $e := 0 + 0\mathbf{i}$. *Der Kandidat für das neutrale Element*
Sei $c \in \mathbb{C}$. *Vor. Beweis Allaussage*
Schreibe $c = a + b\mathbf{i}$, mit $a, b \in \mathbb{R}$. *Einsetzen der Def.*
Dann gilt $c + e = (a + b\mathbf{i}) + (0 + 0\mathbf{i}) = (a + 0) + (b + 0)\mathbf{i} = a + b\mathbf{i} = c$, wie gewünscht.
(Nachweis, dass e als neutrales Element wirkt.)

(c) Inverse Elemente:
Zu zeigen:

$$\forall c \in \mathbb{C} \exists d \in \mathbb{C} : c + d = e$$

Sei $c \in \mathbb{C}$. *Vor. Beweis Allaussage*
Schreibe $c = a + b\mathbf{i}$, mit $a, b \in \mathbb{R}$. *Einsetzen der Def.*
Setze $d := -a + (-b)\mathbf{i}$, *Der Kandidat für das Inverse zu c*
dann gilt $c + d = (a + b\mathbf{i}) + (-a + (-b)\mathbf{i}) = (a + (-a)) + (b + (-b))\mathbf{i} = 0 + 0\mathbf{i} = e$, wie gewünscht.
(Nachweis, dass d als inverses Element zu c wirkt.)

Beachte: Da der Buchstabe c hier in verschiedenen Rollen benutzt wird – einmal muss die komplexe Zahl c *nach* der Behandlung des Existenzquantors eingeführt werden und das zweite Mal *davor* – ist eine „Generalvoraussetzung“, dass c immer eine komplexe Zahl ist, unzulässig!

Für die Anwendung der oben vorgestellten Beweismethoden, muss man manchmal auch Aussagen, die Quantoren enthalten Verneinen. Dafür gilt:
„Es gibt kein *bla* mit *blub*.“ ist gleichbedeutend mit „Für alle *bla* gilt nicht *blub*.“
In Formeln:

$$(\neg \exists bla : blub) \Leftrightarrow (\forall bla : \neg blub)$$

und „Nicht für alle *bla* gilt *blub*.“ ist gleichbedeutend mit „Es gibt ein *bla* das nicht *blub* erfüllt.“
In Formeln:

$$(\neg \forall bla : blub) \Leftrightarrow (\exists bla : \neg blub)$$

So kann man auch Aussagen mit hintereinandergereihten Quantoren negieren.
Beispiel: Sei V ein K -Vektorraum und $M \subseteq V$.
M heißt linear unabhängig, wenn

$$\forall k \in \mathbb{N}\ \forall v_1, \ldots, v_n \in M\ \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K : \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = 0 \Rightarrow (\forall k \in \{1, \ldots, n\} : \lambda_k = 0).$$

Die Verneinung davon gibt den Begriff der linearen Abhängigkeit:
M heißt linear abhängig, wenn

$$\neg(\forall k \in \mathbb{N} \forall v_1, \ldots, v_n \in M \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K : \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = 0 \Rightarrow (\forall k \in \{1, \ldots, n\} : \lambda_k = 0)).$$

Also wenn

$$\exists k \in \mathbb{N} \exists v_1, \ldots, v_n \in M \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K : \sum_{k=1}^{n} \lambda_k v_k = 0 \wedge (\exists k \in \{1, \ldots, n\} : \lambda_k \neq 0)).$$

Macht euch außerdem klar, dass eine Aussage wesentlich von den verwendeten Quantoren und deren Reihenfolge abhängen kann!

Beispiel: „Inverse Elemente " in der Gruppendefinition:
Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e.
Welches ist die richtige Definition, und was drücken die anderen Aussagen aus?

- $\exists h \in G\ \forall g \in G : g \circ h = e$
- $\forall g \in G\ \forall h \in G : g \circ h = e$
- $\forall g \in G\ \exists h \in G : g \circ h = e$
- $\exists g \in G\ \exists h \in G : g \circ h = e$

Finden von Beweisen

Wie findet man nun Beweise? Dazu gibt es eine gute und eine schlechte Nachricht. Zuerst die schlechte: Es kein allgemeines Rezept, nach dem man alle wahren Aussagen beweisen kann – dann wäre Mathematik auch langweilig und wir könnten das Beweisen den Computern überlassen ... Die gute Nachricht ist, dass es eine Menge Aussagen gibt, die sich, nachdem man allen Hinweisen, die in ihrer Struktur vorhanden sind, nachgegangen ist, schon fast bewiesen sind. Die wesentlichen Punkte dabei sind: Erstens die Schlüsselworte gewissenhaft einzusetzen und zweitens verwendete Begriffe durch einsetzen von Definitionen aufzuschlüsseln. Das liest man am besten an einem **Beispiel**. Schlüsselworte sind **fett**, Gedanken zum Lösungsweg *kursiv* gedruckt. Zu beweisen ist der folgende
Satz: Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $M := \{v_1, v_2\} \subseteq V$. Die Menge M ist genau dann linear unabhängig, wenn $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$ linear unabhängig ist.
Beweis:
Die expliziten Voraussetzungen des Satzes „Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $M := \{v_1, v_2\} \subseteq V$." brauchen an dieser Stelle nicht wiederholt werden. Das erste Ziel ist es, alle strukturellen Hinweise auf die Beweisstruktur „abzuarbeiten". Es ist eine Äquivalenz zu zeigen, also müssen zwei Implikationen gezeigt werden. Wir fangen mit einer an:
„$\Rightarrow$ "
Jetzt müssen wir eine Implikation zeigen. Wir entscheiden uns für die direkte Methode. Also setzen wir voraus:
Sei M linear unabhängig.
Nun müssen wir irgendwie bei der Aussage „$\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$ ist linear unabhängig" ankommen. Wir zitieren die Definition, konkret für unseren Fall:
zu zeigen: $\forall \lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}\ :\ \big(\lambda_+(v_1 + v_2) + \lambda_-(v_1 - v_2) = 0\big) \Rightarrow \big(\lambda_+ = \lambda_- = 0\big)$.
Ein Allquantor!! Also weiter:
Seien $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$.
... und dann eine Implikation. Wir versuchen wieder den direkten Weg:
Es gelte $\lambda_+(v_1 + v_2) + \lambda_-(v_1 - v_2) = 0$.
An dieser Stelle haben wir alle formalen Hinweise auf die Beweisstruktur abgearbeitet. Das nächste Ziel ist es eine Aussage zu bekommen, auf die wir die Voraussetzung „M linear unabhängig " anwenden können. Dazu wenden wir die beiden Distributivgesetze an, die in Vektorräumen gelten.
Dann gilt auch $0 = \lambda_+ v_1 + \lambda_+ v_2 + \lambda_- v_1 - \lambda_- v_2 = (\lambda_+ + \lambda_-)v_1 + (\lambda_+ - \lambda_-)v_2$.
Das wäre geschafft! Wir haben eine Linearkombination des Nullvektors aus v_1 und v_2. Jetzt können wir folgern, dass die Koeffizienten vor den Vektoren Null sind:
Da M linear unabhängig ist, **folgt** $\lambda_+ + \lambda_- = \lambda_+ - \lambda_- = 0$ und damit $\lambda_+ = \lambda_- = 0$.
Damit ist die Implikation unter dem Allquantor gezeigt und wir sind mit der einen Richtung fertig:
Also ist $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2\}$ linear unabhängig.
Jetzt fehlt noch die Rückrichtung:
„$\Leftarrow$"
Diese geht so ähnlich und wird hier aus Platzgründen weggelassen. $\square$

Noch einmal der **Beweis** ohne Zwischengedanken:
„$\Rightarrow$ “ Sei M linear unabhängig.
zu zeigen: $\forall \lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}\ :\ \big(\lambda_+(v_1+v_2) + \lambda_-(v_1-v_2) = 0\big) \Rightarrow \big(\lambda_+ = \lambda_- = 0\big)$.
Seien $\lambda_+, \lambda_- \in \mathbb{R}$ derart, dass $\lambda_+(v_1+v_2) + \lambda_-(v_1-v_2) = 0$.
Dann gilt auch $0 = \lambda_+v_1 + \lambda_+v_2 + \lambda_-v_1 - \lambda_-v_2 = (\lambda_+ + \lambda_-)v_1 + (\lambda_+ - \lambda_-)v_2$.
Da M linear unabhängig ist, folgt $\lambda_+ + \lambda_- = \lambda_+ - \lambda_- = 0$ und damit $\lambda_+ = \lambda_- = 0$.
Also ist $\{v_1+v_2, v_1-v_2\}$ linear unabhängig.

„$\Leftarrow$“ ... □

Checkliste für Beweise

Die meisten Kommentare, die wir beim Korrigieren in eure Hausaufgaben schreiben, beziehen sich auf einen der folgenden Punkte. Wir schreiben häufig einfach fehlende Bestandteile hin. Wenn ihr die folgende Checkliste benutzt, werden eure Beweise mit Sicherheit besser lesbar. Außerdem merkt ihr an welchen Stellen es beim Beweisen hakt und könnt so gezielt nachfragen.

1. **Ist die generelle Struktur klar?**
Ist durch Benutzung von Schlüsselworten deutlich, welche Richtung der Beweis nehmen soll? Insbesondere wenn es kein direkter Beweis einer Implikation oder Allaussage ist, sollte man am Anfang schreiben, was passiert. – z.B. einen Induktions- oder Widerspruchsbeweis als solchen kennzeichnen! Das Ziel ist, dem Leser eine (korrekte) Idee von dem, was ihn im weiteren Verlauf des Beweises erwartet, zu vermitteln.
Ich male beim Korrigieren, wenn dieser Punkt unklar ist ein großes Fragezeichen daneben.

2. **Sind alle Buchstaben eingeführt, bevor sie benutzt werden?**
Fragt euch bei jedem Buchstaben, den ihr als Variablennamen verwendet, wo er herkommt. Kennzeichnet er einen allgemeinen Vertreter einer Menge, oder ist er ein Name für ein Objekt, dessen Existenz wir folgern können? Gegneralvoraussetzungen für die gesamte Vorlesung gibt es nicht!
Das ergänze ich einfach, oder schreibe eine Frage danach hin.

3. **Sind genügend Begründungen da?** Für eine Folgerung, die *nur* den vorangehenden Satz als Voraussetzung benötigt, ist eine Begründung meist nicht nötig. Aber wenn ihr mehrere Teilresultate oder einen Satz aus der Vorlesung zu einer Schlussfolgerung braucht, sollten diese als Begründung angeführt werden.
Mein wahrscheinlich häufigster Kommentar beim Korrigieren: Warum?

4. **Werden alle Voraussetzungen verwendet?**
Wenn dies nicht der Fall ist, kann das drei Ursachen haben: Erstens könnte die Aussage allgemeiner gelten, als in der Aufgabe formuliert. Zweitens kann es sein, dass ihr die Voraussetzung zwar verwendet, aber sie nirgends als Begründung anführt. Darum solltet ihr euren Beweis dann noch einmal daraufhin untersuchen und die Begründung an der richtigen Stelle einfügen. Schließlich kann der Beweis auch falsch oder unvollständig sein! Um die Ursache für eine nicht benutzte Voraussetzung zu finden, sind auch die Sprechstunden hilfreich!

5. **Ist ein lesbarer Text entstanden?**
Sind alle Sätze vollständig? Ist die Rechtschreibung korrekt? Ist bei Durchgestrichenem klar, wo und womit es weitergeht? Dieser letzte Punkt gilt eigentlich für jeden Text, den ihr produziert! Matrlich kannich ein text der Sich kaum an rgeln haelt lesne. Aber wie der letzte Satz — als Extremfall — zeigt, macht es einem nur das Leben bzw. Lesen schwer. Man hat dann als Leser den Eindruck, dass der Autor einen entweder ärgern oder vom Lesen abhalten möchte.

Der beste Test für einen Beweis ist, ihn von einem Kommilitonen nach dieser Checkliste prüfen zu lassen, da man ja weiß, was man aufschreiben wollte, und daher vieles übersieht.

Mengen

In der Lineare Algebra nehmen wir einen „Anwenderstandpunkt“ ein, wenn es um Mengenlehre geht: Da wir es nur mit „anständigen“ Mengen zu tun haben, genügt es uns zu wissen, wie man mit diesen umgeht, und dass es eine mathematische Absicherung für dieses Vorgehen gibt. Was sind nun die grundlegenden Begriffe, denen wir in Beweisen mit Mengen begegnen? Zentral ist der Begriff der Teilmenge

$$A \subseteq B \quad :\Leftrightarrow \quad (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

und die Beschreibung von Mengen durch die Eigenschaften ihrer Elemente

$$M := \{m \in X \mid m \text{ hat die Eigenschaft} P\}.$$

Hierbei ist X eine bekannte „anständige“ Menge. Als Beispiel hierzu folgende Aufgabe: Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K. Seien weiter $F \in \mathrm{End}(V)$. Zeige:

$$\mathrm{Ker}(F) \subseteq \mathrm{Ker}(F \circ F).$$

Beweis:
Es soll eine Teilmengenbeziehung gezeigt werden. Also müssen wir die Implikation

$$v \in Ker(F) \Rightarrow v \in Ker(F \circ F)$$

zeigen. Wir setzen direkt an:
Sei $v \in \mathrm{Ker}(F)$,
$Ker(F)$ ist eine durch die Eigenschaft „wird auf Null abgebildet“ definierte Menge:
d.h. $F(v) = 0$.
Nun müssen wir untersuchen, ob $v \in Ker(F \circ F)$ gilt. Also müssen wir $(F \circ F)(v)$ untersuchen.
Dann gilt $(F \circ F)(v) =$ *(... Definition von $F \circ F$ ...)* $= F(F(v)) =$ *(... nun die Voraussetzung einsetzen ...)* $= F(0) =$
Das sollte 0 sein. Aber das ist es auch:
$= 0$, da F linear ist.
Das ist aber die Bedingung dafür, dass $v \in Ker(F \circ F)$
Also ist $v \in \mathrm{Ker}(F \circ F)$. □
Noch einmal der vollständige Beweis ohne Zwischengedanken:
Beweis:
Sei $v \in \mathrm{Ker}(F)$, d.h. $F(v) = 0$.
Dann gilt $(F \circ F)(v) = F(F(v)) = F(0) = 0$, da F linear ist.
Also ist $v \in \mathrm{Ker}(F \circ F)$. □

Beispiel: Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum über dem Körper K. Seien weiter $F \in \mathrm{End}(V)$. Zeige:

$$\mathrm{Im}(F \circ F) \subseteq \mathrm{Im}(F).$$

Beweis: (mit Gedanken)
... Für den Beweis der Teilmengenbeziehung setzen wir wieder an:
Sei $v \in \mathrm{Im}(F \circ F)$.
... Wir sehen auf die Definition $Im(F \circ F) = \{v \in V \mid \exists w \in V : F \circ F(w) = v\}$:
Also gibt es ein $w \in V$, so dass $v = (F \circ F)(w) =$
... Nun wollen wir zeigen, dass $v \in Im(F) = \{v \in V \mid \exists w' \in V : F(w') = v\}$ gilt. Dazu müssen wir ein Urbild von v angeben. Wir setzen erst einmal die Definition von $F \circ F$ ein:
$= F(F(w))$.
... Hier sehen wir schon, was das gesuchte Urbild sein kann:
v ist also das Bild von $F(w)$ unter F und damit $v \in \mathrm{Im}(F)$.

Beweis: (ohne Gedanken)
Sei $v \in \mathrm{Im}(F \circ F)$. Also gibt es ein $w \in V$, so dass $v = (F \circ F)(w) = F(F(w))$. v ist also das Bild von $F(w)$ unter F und damit $v \in im(F)$. □

Wenn die Buchstaben knapp werden

Als Faustregel kann man sagen: Benutze für bis zu drei Objekte aus derselben Menge Buchstaben aus demselben Alphabet. Sind es mindestens vier, benutze Indizes.

Es gibt ein paar Konventionen, die „fast jeder“ so macht – das heißt nicht, dass man die Buchstaben nicht anders verwenden darf. Man sollte sich aber der „psychologischen Wirkung“ bewusst sein. (Frei nach einem Mathematikerwitz: „*Betrachte eine Funktion* $\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *so dass* $\varepsilon_n \to \infty$ *für* $n \to 0$ ...“)

Einige davon habt ihr bestimmt auch schon verinnerlicht: natürliche Zahlen heißen n, m oder k, ℓ, j, i. – wobei i eine ungünstige Wahl ist, wenn man mit komplexen Zahlen rechnet. Vektoren heißen häufig v, w, u. Matrizen heißen A, B, C.

Zur Bezeichnung von Skalaren – also von Elementen des Körpers, über dem ein Vektorraum definiert ist – benutzt man häufig kleine griechische Buchstaben. Daher eine Übersicht, nach dem Motto: Über einen Text redet es sich besser, wenn man weiß, wie die komischen Symbole heißen.

α	alpha	η	eta	ν	nü	τ	tau
β	beta	θ	theta	ξ	xi	υ	ypsilon
γ	gamma	ι	iota	o	omikron	φ	phi
δ	delta	κ	kappa	π	pi	χ	chi
ε	epsilon	λ	lambda	ρ	rho	ψ	psi
ζ	zeta	μ	mü	σ	sigma	ω	omega

Literatur

[1] Exner, George R. *An accompaniment to higher mathematics.* Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1996

[2] Beutelsbacher, Albrecht. *Das ist o.B.d.A trivial.* Vieweg, 1999 (5. Auflage)