Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

Prof. Rolf H. Möhring
Felix König

ADM II – Lineare und Ganzzahlige Optimierung
Wintersemester 2008/2009

Max Klimm

2. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 3.11.2008, *vor* der Übung

Aufgabe 5 **5 Punkte**

Betrachtet ein lineares Optimierungsproblem über dem in Standardform gegebenem Polyeder $P = \{x: \; Ax = b, x \geq 0\}$, wobei A n Spalten und m linear unabhängige Zeilen hat. Gebt zu jedem der folgenden Punkte entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an:

(a) Gilt $n = m + 1$, so hat P höchstens zwei zulässige Basislösungen.

(b) Die Menge aller Optimallösungen ist beschränkt.

(c) In jeder Optimallösung sind höchstens m Variablen echt positiv.

(d) Gibt es mehr als eine Optimallösung, so gibt es wenigstens zwei optimale zulässige Basislösungen.

Aufgabe 6 **5 Punkte**

Sei P ein Polyeder. Ziel ist es, die lineare Zielfunktion $c^\top x$ über P zu minimieren. Ein Vektor d heißt *zulässige Richtung* für $x \in P$, falls es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $x + \delta d \in P$. Beweist:

(a) $x \in P$ optimal $\iff$ $c^\top d \geq 0 \; \forall$ zulässige Richtungen d für x

(b) $x \in P$ eindeutige Optimallösung $\iff$ $c^\top d > 0 \; \forall$ zulässige Richtungen d für x

Aufgabe 7 **5 Punkte**

Betrachtet folgendes lineares Programm:

$$
\begin{array}{lllllllll}
\mathit{min} & 162 & -5x_1 & -\,4x_2 & -\,3x_3 & & & & \\
\mathit{s.t.} & & 6x_1 & +\,4x_2 & +\,3x_3 & +\,x_4 & +\,x_5 & = 16 & \\
 & & 2x_1 & -\,2x_2 & +\,x_3 & -\,x_4 & +\,x_5 & = 6 & \\
 & & 9x_1 & +\,8x_2 & +\,5x_3 & +\,x_4 & +\,x_5 & \leq 24 & \\
 & & & & & & x_i & \geq 0 & \forall\, 1 \leq i \leq 5
\end{array}
$$

(a) Bringt das LP in Standardform.

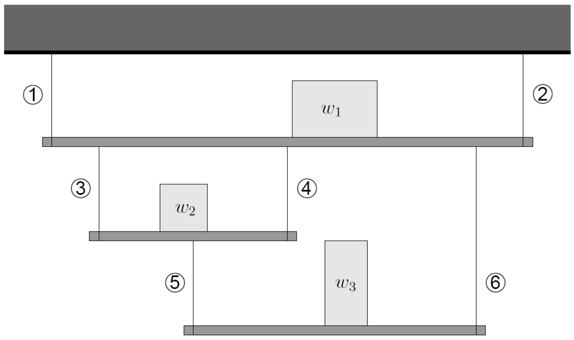
(b) Stellt das (vergrößerte) Tableau zur Basis $B = \{4, 5, 6\}$ auf, so dass die Basisspalten die Einheitsmatrix bilden. (Warum gibt es plötzlich eine sechste Spalte?)

(c) Führt auf dem entstandenen Tableau den Simplexalgorithmus aus, d.h. führt Basiswechsel durch, bis ihr eine optimale zulässige Basislösung erhaltet. Wählt dabei als Pivotspalte immer die Spalte mit dem kleinsten reduzierten Kostenkoeffizienten.

(d) Gebt die erhaltene Optimallösung mit ihrem Wert explizit an. Warum handelt es sich dabei um eine Optimallösung?

Aufgabe 8 **5 Punkte**

Betrachtet folgende Konstruktion aus drei Plattformen, die wie unten gezeigt von einer stabilen Decke hängen.



Verbindungen 1-6 bestehen aus Drahtseilen. Natürlich muss für jede Verbindung wenigstens ein Drahtseil verwendet werden - werden mehrere Drahtseile verwendet, so steigt die Tragfähigkeit der Verbindung linear an, wobei aber immer auf beiden Seiten einer Plattform gleich viele Drahtseile verwendet werden müssen.

Ein Drahtseil kann 50kg tragen, egal wie lang es ist. Wir ignorieren also das Gewicht der Drahtseile selbst. Alle Verbindungen sind 1m lang, nur Verbindung 6 ist 2m lang. Insgesamt stehen für die Konstruktion 50m Seil zur Verfügung.

Die Plattformen selbst wiegen je 10kg. Gesucht ist eine Realisierung der Konstruktion, die ihre Gesamttragkraft maximiert. Folgende Nebenbedingungen sind außerdem noch zu erfüllen:

- Auf die obere Plattform darf nicht mehr Gewicht geladen werden als auf die anderen beiden Plattformen zusammen.
- Auf die untere Plattform darf nicht mehr Gewicht geladen werden als auf die anderen Plattformen zusammen.

(a) Modelliert das Problem als lineares Programm. Ignoriere dabei wie bisher üblich Ganzzahligkeitsanforderungen.

(b) Bringt das lineare Programm in Standardform. Welche Dimension hat der Raum der zulässigen Lösungen?

(c) Gebt eine zulásige Basislösung mit der zugehörigen Basis an.