TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
Institut für Mathematik

Prof. Rolf H. Möhring
Felix König

ADM II – Lineare und Ganzzahlige Optimierung
Wintersemester 2008/2009

Max Klimm

4. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 17.11.2008, *vor* der Übung

Aufgabe 12 **3 Punkte**

Beweist folgendes Lemma vom approximativen komplementären Schlupf aus der Übung: Sei x eine primal und π eine dual zulässige Lösung von min $c^\top x: \; Ax \geq b, x \geq 0$ und $\alpha \geq 1$. Gelten

$$x_j(\pi^\top A_j - c_j) = 0 \qquad \text{und} \qquad \pi_i \neq 0 \Rightarrow a_i^\top x \leq \alpha b_i,$$

so gilt $c^\top x \leq \alpha \pi^\top b$.

Aufgabe 13 **4 Punkte**

Gegeben sei eine Subroutine, die zu einem beliebigen linearen Ungleichungssystem entweder eine zulässige Lösung zurückgibt oder feststellt, dass keine solche existiert.

Entwerft einen einfachen Algorithmus, der für ein beliebiges lineares Programm durch einen einzigen Aufruf dieser Subroutine eine Optimallösung berechnet, so lange eine existiert.

Aufgabe 14 **5 Punkte**

n Personen möchten vom selben Ausgangsort aus ein gemeinsames Ziel in D Kilometern Entfernung erreichen. Jede Person kann laufen, und es gibt ein einzelnes Fahrrad, auf dem genau eine Person fahren kann. Die Geschwindigkeiten von Person j beim Laufen bzw. Fahrad fahren in km/h sind durch w_j bzw. b_j gegeben. Unter der Annahme, dass alle Personen Ihre Reise zum Zeitpunkt 0 beginnen, soll herausgefunden werden, zu welchem frühesten Zeitpunkt alle n Personen das Ziel erreicht haben können.

(a) Zeigt, dass der Optimalwert des folgenden linearen Programms eine unter Schranke an den gesuchten Zeitpunkt darstellt.

$$\begin{array}{llrcll}
\text{minimize} & t & & & & \\
\text{subject to} & & t - x_j - x_j' - y_j - y_j' & \geq & 0 & \forall\, j = 1, \ldots, n \\
& & t - \sum_{j=1}^{n} y_j - \sum_{j=1}^{n} y_j' & \geq & 0 & \\
& & w_j x_j - w_j x_j' + b_j y_j - b_j y_j' & = & D & \forall\, j = 1, \ldots, n \\
& & \sum_{j=1}^{n} b_j y_j - \sum_{j=1}^{n} b_j y_j' & \leq & D & \\
& & x_j, x_j', y_j, y_j' & \geq & 0 & \forall\, j = 1, \ldots, n
\end{array}$$

(b) Findet ein Beispiel für obiges Problem, in dem der Optimalwert des LP echt kleiner ist als der frühestmögliche Ankunftszeitpunkt der letzten Person.

Aufgabe 15 **8 Punkte**

Schreibt *ZIMPL*-Dateien, die das LP aus der letzten Aufgabe modellieren. Trennt dabei Daten und Problem. Erzeugt für folgende Beispiele je eine `.lp`-Datei und löst sie mit *CPLEX*:

	D	n	$w_1, \ldots, w_n$	$b_1, \ldots, b_n$
(i)	10	3	$2, 4, 2$	$12, 16, 12$
(ii)	45	9	$3, 2, 4, 3, 3, 5, 4, 2, 6$	$14, 11, 15, 13, 17, 17, 14, 10, 18$
(iii)	100	20	$w_j = (10 + j)/5$	$b_j = (20 + j)/2$

Schickt eure Lösung bis Montag, 17.11., 12 Uhr in folgender Form an *klimm@math.tu-berlin.de*:

- Betreff: Aufgabe 15, Gruppe <`Gruppennummer`>

Als Anlage

- eine *ZIMPL*-Datei, die das Problem enthält,
- drei *ZIMPL*-Dateien, in denen die drei Datensätze spezifiziert sind,
- die originale, unveränderte *CPLEX* Log-Datei, die beim Lesen, Lösen und der Ausgabe der Optimallösung für alle drei Probleme nacheinander geschrieben wurde. Die Log-Datei soll ausschließlich diese Informationen enthalten. Das geht z.B. so:
  1. Mit `s` eine neue Log-Datei beginnen.
  2. Für alle drei Probleme nacheinander: Mit `r`, `o` und `d` die Optimallösung berechnen und ausgeben.