Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

Prof. Rolf H. Möhring
Felix König

ADM II – Lineare und Ganzzahlige Optimierung
Wintersemester 2008/2009

Max Klimm

# 5. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 24.11.2008, *vor* der Übung

**Aufgabe 16** **6 Punkte**

Das Bild unten zeigt den Bau der Rio-Andirrio-Brücke, die das griechische Festland über dem Golf von Korinth mit der Peloponnes verbindet, und die 2004 fertiggestellt wurde.

Die Tabelle links gebe die erwarteten Kosten während der 6 Baujahre an. Nehmen wir an, der Bau soll durch die Herausgabe von Schatzbriefen finanziert werden, die zu Beginn jedes Baujahres herausgegeben werden und eine vorab festgelegte Anzahl von vollen Jahren laufen. Die längstmögliche Laufzeit betrage 6 Jahre. Die Zinsen, die auf einen Schatzbrief gezahlt werden müssen, sind in der Tabelle rechts angegeben. Überschüssiges Geld, das nicht unmittlebar für Baukosten benötigt wird, kann zu $6,8\%$ p.a. angelegt werden.

| Jahr | Kosten |
|---|---|
| 1 | 20 Mio € |
| 2 | 17 Mio € |
| 3 | 23 Mio € |
| 4 | 24 Mio € |
| 5 | 25 Mio € |
| 6 | 21 Mio € |

| Laufzeit | Gesamtverzinsung |
|---|---|
| 1 Jahr | 7% |
| 2 Jahre | 15% |
| 3 Jahre | 23% |
| 4 Jahre | 32% |
| 5 Jahre | 41% |
| 6 Jahre | 50% |

Tabelle 1: Baukosten für jedes Baujahr und Gesamtzinsen für Schatzbriefe.

Wieviele Schatzbriefe mit welchen Laufzeiten sollen jedes Jahr herausgegeben werden, damit die Gesamtschuld aus allen Schatzbriefen am Ende so gering wie möglich ist?

(a) Stellt ein lineares Programm auf, das dieses Problem modelliert.

(b) Formuliert das Problem in *ZIMPL* und löst es mit *CPLEX*.

(c) Nehmen wir an, alle ausgestellten Schatzbriefe laufen genau bis zum Ende der Bauarbeiten. Passt das Modell an und berechnet eine Optimallösung unter den neuen Bedingungen.

**Aufgabe 17** **5 Punkte**

Beweist die folgenden Äquivalenzen.

(a) (P. Gordan, 1873) $Ax < 0$ unlösbar $\iff$ $y^T A = 0, y \geq 0, y \neq 0$ lösbar.

(b) (E. Stiemke, 1915) $Ax = 0, x > 0$ unlösbar $\iff$ $y^T A \geq 0, y^T A \neq 0$ lösbar.

(c) (J.A. Ville, 1938) $Ax < 0, x \geq 0$ unlösbar $\iff$ $y^T A \geq 0, y \geq 0, y \neq 0$ lösbar.

(d) (A.W. Tucker, 1956) $Ax \geq 0, x \geq 0$ hat keine Lösung mit $x_k > 0 \iff y^T A \leq 0, y \geq 0$ hat eine Lösung mit
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik} y_i < 0.$$

**Aufgabe 18** **5 Punkte**

Sei $C \subseteq R^n$ ein Kegel. Eine Menge $S \subseteq C$ heißt *Kegelbasis* von $C$, falls der von den Elementen von $S$ erzeugte Kegel genau $C$ ist und das Weglassen eines Elements von $S$ diese Eigenschaft zerstören würde.

(a) Gebt zwei Kegelbasen des $\mathbb{R}^2$ an, die unterschiedliche Kardinalität haben.

(b) Beweist oder widerlegt: Es gibt Kegel im $\mathbb{R}^n$, die Basen unendlicher Kardinalität haben.

**Aufgabe 19** **4 Punkte**

Findet eine Instanz des Disjunkte-Wege-Problems aus der VL, die das Distanzkriterium erfüllt, für die es aber keine zulässige Lösung gibt.