Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

Prof. Rolf H. Möhring
Felix König

ADM II – Lineare und Ganzzahlige Optimierung
Wintersemester 2008/2009

Max Klimm

6. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 1.12.2008, *vor* der Übung

Aufgabe 20 — 5 Punkte

Sei $A \in \{0,1\}^{m \times n}$ eine 0-1-Matrix. Eine *Linie* ist eine Zeile oder eine Spalte, also eine spezielle Teilmenge von Einträgen a_{ij} von A. Eine *Überdeckung* ist eine Menge L von Linien, so dass jedes a_{ij} mit $a_{ij} \neq 0$ in einer Linie in L liegt. Außerdem heißt eine Menge I von a_{ij} mit $a_{ij} \neq 0$ *unabhängige Menge*, falls es keine Linie gibt, die mehr als ein Element in I enthält.

Zeigt: Für jede unabhängige Menge I und jede Überdeckung L gilt $|I| \leq |L|$.

Aufgabe 21 — 5 Punkte

Zeigt: Das LP $\min c^\top x : \; Ax = b$ hat entweder keine zulässige Lösung oder sein Zielfunktionswert ist unbeschränkt oder alle zulässigen Lösungen sind optimal. Gilt diese Aussage auch, wenn man zusätzlich $x \geq 0$ fordert?

Aufgabe 22 — 5 Punkte

Betrachtet einen Markt, auf dem Spieler zum Zeitpunkt t_1 Geld in beliebige Mengen von n verschiedenen Waren investieren und diese zu einem späteren Zeitpunkt t_2 wieder verkaufen. Zwischen t_1 und t_2 passiert in der Regel viel Unvorhersehbares, so dass sich der Markt zum Zeitpunkt t_2 in einer von m *Situationen* befinden kann. In Situation i erhält man beim Verkauf einer Ware j je Einheit r_{ij} Geldeinheiten.

Es ist durchaus möglich, in eine negative Menge einer Ware zu investieren; man spricht in diesem Fall von einem Leerverkauf, d.h. man verkauft zum Zeitpunkt t_1 Waren, die man selbst erst zum Zeitpunkt t_2 kauft. In diesem Fall muss man zum Zeitpunkt t_2 je zuvor leerverkaufter Einheit Ware genau r_{ij} Geldeinheiten bezahlen. Ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, der die Mengen an allen Waren beschreibt, in die ein Spieler auf dem Markt investiert hat, heißt *Portofolio*. Der *Wert* eines Portofolios in Situation i ist demnach $w_i := \sum_{j=1}^n r_{ij} x_j$.

Damit der Markt nicht aus den Fugen gerät, sollten die *Preise* $p \in \mathbb{R}^n$ für die Waren zum Zeitpunkt t_1 so beschaffen sein, dass kein Portofolio x mit negativer Gesamtinvestition $\sum_{j=1}^n p_j x_j$ in jeder Situation nichtnegativen Wert hat; diese Bedingung heißt in der Finanzwelt auch *Absence of Arbitrage*.

Seien alle r_{ij} gegeben. Gebt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass Preise Absence of Arbitrage erfüllen.

Aufgabe 23 — 5 Punkte

Sei B eine dual zulässige aber primal unzuläsige Basis im dualen Simplexalgorithmus mit Tableau X, es sei also i mit $x_{B(i)} = x_{i0} < 0$. Zeigt:

(a) $x_{ij} \geq 0 \; \forall j = 1, \ldots, n \Rightarrow$ dualer Zielfunktionswert unbeschränkt

(b) Sei s mit $\frac{x_{0s}}{x_{is}} = \max\{\frac{x_{0r}}{x_{ir}} : x_{ir} < 0, r = 1, \ldots, n\}$. Dann erhält Pivotisieren mit Pivotelement $x_{B(i)s}$ die duale Zulässigkeit der Basis.