Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

ADM II – Lineare und Ganzzahlige Optimierung
Wintersemester 2008/2009

Prof. Rolf H. Möhring
Felix König

Max Klimm

7. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 8.12.2008, *vor* der Übung

Dieses Blatt ist das letzte der ersten Semesterhälfte.

Aufgabe 24 — 8 Punkte

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter zusammenhängender Graph mit Kantengewichten $c_e \geq 0\ \forall e \in E$. Eine *Partition* P von G ist eine Aufteilung von V in Mengen $P_1, P_2, \ldots$ mit $\cap_i P_i = \emptyset$ und $V = \cup_i P_i$. Definiere $E(P) := \{(u,v) \in E : \ u \in P_i, v \in P_j, i \neq j\}$. Bezeichne $\kappa(P)$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $(V, E \setminus E(P))$.

Betrachte folgendes LP:

$$
\begin{array}{lll}
\textit{min} & c^\top x & \\
\textit{s.t.} & \displaystyle\sum_{e \in E(P)} x_e \geq \kappa(P) - 1 & \forall P \text{ Partition von } G \\
& x_e \geq 0 & \forall e \in E
\end{array}
$$

(a) Zeigt, dass der Kanteninzidenzvektor jedes spannenden Baums von G eine zulässige Lösung des LP ist.

(b) Stellt das duale LP auf und nehmt an, das Problem würde mit dem primal-dualen Algorithmus gelöst. Beschreibt das resultierende Vorgehen möglichst kompakt als Graphenalgorithmus auf G.

(c) Folgert, dass der Kanteninzidenzvektor jedes MST auch eine Optimallösung des LP ist.

Aufgabe 25 — 6 Punkte

In einem komplizierten Versuchsaufbau wird eine Größe y in Abhängigkeit eines Paramters x gemessen. Folgende n Messpunkte (x_i, y_i) wurden beobachtet:

x_i	0.0	0.5	1.0	1.5	1.9	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.6	7.0	7.6	8.5	9.0	10.0
y_i	1.0	0.9	0.7	1.5	2.0	2.4	3.2	2.0	2.7	3.5	1.0	4.0	3.6	2.7	5.7	4.6	6.0	6.8	7.3

Es besteht die Vermutung, dass sich y durch eine lineare oder quadratische Funktion von x näherungsweise berechnen lässt. Verwendet *ZIMPL* und *CPLEX*, um

(a) ein lineares Polynom $p_1^{\varnothing}(x)$, so dass die durchschnittliche Abweichung $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |y_i - p_1^{\varnothing}(x_i)|$ der Messwerte minimal ist,

(b) ein lineares Polynom $p_1^{\max}(x)$, so dass die maximale Abweichung $\max_{i=1,\ldots n} |y_i - p_1^{\max}(x_i)|$ der Messwerte minimal ist,

(c) ein quadratisches Polynom $p_2^{\varnothing}(x)$, so dass die durchschnittliche Abweichung $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |y_i - p_2^{\varnothing}(x_i)|$ der Messwerte minimal ist, und

(d) ein quadratisches Polynom $p_2^{\max}(x)$, so dass die maximale Abweichung $\max_{i=1,\ldots n} |y_i - p_2^{\max}(x_i)|$ der Messwerte minimal ist,

zu berechnen.

Schickt *ZIMPL*-Dateien und *CPLEX*-Log bis zum Abgabetermin an `klimm@math.tu-berlin.de`.

Aufgabe 26 **6 Punkte**

Sei (G, u, b, c) eine Instanz des kostenminimalen Flussproblems und min $c^\top x : Ax = b, 0 \leq x \leq u$ das zugehörige lineare Programm wie in der UE vom 1.12., d.h. sei A aus der Knoten-Kanten-Inzidenzmatrix von G durch Streichung einer Zeile entstanden.

(a) Zeigt: T spannender Baum für $G \iff B := \{j : j \in E(T)\}$ ist Basis von A.

(b) Beschreibt, wie sich die zur Basislösung des LP gehörende zulässige Lösung von (G, u, b, c) in den verschiedenen Fällen verändert, die bei einer Pivotoperation im Simplex-Algorithmus mit oberen Schranken auftreten können.