Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

Prof. Rolf H. Möhring
Felix König

ADM II – Lineare und Ganzzahlige Optimierung
Wintersemester 2008/2009

Max Klimm

11. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 26.1.2009, *vor* der Übung

Aufgabe 38 **10 Punkte**

Betrachtet das Problem Facility Location aus der Übung vom 8.12.2008. Wir führen nun zusätzlich Bedarfe d_j für alle Kunden $j \in D$ und Kapazitäten u_i für alle möglichen Standorte $i \in F$ ein. In einer zulässigen Lösung darf nun die Summe der Bedarfe aller Kunden, die mir einem Standort verbunden werden, die Kapazität des Standorts nicht überschreiten. Wir erhalten also folgende mögliche Formulierung als ganzzahliges Programm:

$$\min \left\{ \sum_{i \in F, j \in D} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i \in F} f_i y_i : \sum_{j \in D} d_j x_{ij} \le u_i y_i ; \sum_{i \in F} x_{ij} = 1 ; x_{ij}, y_i \in \{0,1\} \right\}.$$

Stellt zwei Lagrange Relaxationen für das Problem auf, indem ihr einmal $\sum_{j \in D} d_j x_{ij} \le u_i y_i$ und einmal $\sum_{i \in F} x_{ij} = 1$ relaxiert. Welche der beiden Relaxationen liefert die bessere Schranke?

Aufgabe 39 **5 Punkte**

Sei $Q \in \mathbb{R}^n$ eine endliche Menge, $\bar{Q}$ ihre konvexe Hülle, $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeigt, dass

$$\min\{\max\{c^\top x + \lambda^\top (b - Ax) : \ x \in Q\} : \ \lambda \in \mathbb{R}^m\} = \max\{c^\top y : \ y \in \bar{Q}, Ay = b\}.$$

Aufgabe 40 **5 Punkte**

Im *Fair Connection Game* spielen *Spieler* $i \in \{1, \ldots, k\}$, die mit Start-Zielknoten-Paaren (s_i, t_i) identifiziert werden, auf einem gerichteten Graphen (G, E) mit Kantengewichten $c_e \forall\ e \in E$.

Die *Strategie* S_i einer Spielers i ist ein s_i-t_i-Pfad. Die Kosten $c(S_i)$ einer Stragie ergeben sich aus der fairen Aufteilung der Kosten aller verwendeten Kanten

$$c(S_i) := \sum_{e \in S_i} \frac{c_e}{|\{j : e \in S_j\}|}.$$

In diesem Spiel gibt es im Allgemeinen verschiedene *Nash* oder *User Equilibria (UE)*, also Strategien $(S_1, \ldots, S_k)$ so dass kein Spieler seine Kosten durch Wahl einer anderen Strategie verbessern kann, **angenommen die anderen Spieler behalten Ihre Strategien bei**. Als *Price of Anarchy* bezeichnet man

$$PoA := \frac{\max_{(S_1,\ldots,S_k) \text{ ist } UE} \{\sum_{i=1,\ldots,k} c(S_i)\}}{\min_{S_1,\ldots,S_k} \{\sum_{i=1,\ldots,k} c(S_i)\}}$$

und als *Price of Stability*

$$PoS := \frac{\min_{(S_1,\ldots,S_k) \text{ ist } UE} \{\sum_{i=1,\ldots,k} c(S_i)\}}{\min_{S_1,\ldots,S_k} \{\sum_{i=1,\ldots,k} c(S_i)\}}.$$

Die Begriffe bezeichnen also das Verhältnis des Werts eines schlechtesten bzw. besten User Equilibrium zum Wert einer global optimalen Lösung des Spiels.

Findet ein kleines Beispiel für das Fair Connection Game mit k Spielern, in dem $PoA = k$ und $PoS = 1$. Tipp: Es gibt Beispiele, die kleiner und einfacher sind als das Beispiel für das Braess Paradoxon aus der Übung.