Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik

Prof. Rolf H. Möhring
Felix König

ADM II – Lineare und Ganzzahlige Optimierung
Wintersemester 2008/2009

Max Klimm

12. Übungsblatt

Abgabe: Montag, 2.2.2009, *vor* der Übung

Aufgabe 41 — 7 Punkte

Wir betrachten das assymmetrische Traveling Salesman Problem, gesucht ist also eine Tour im *gerichteten* vollständigen Graphen $D = (V, E)$, die alle Knoten besucht und minimales Gewicht hat. Betrachtet die folgenden beiden Formulierungen als ganzzahliges Programm:

Cut:

$$
\begin{aligned}
\min\ & c^\top x & \\
s.t. \sum_{e \in \delta^+(v)} & x_e = 1 & \forall v \in V \\
\sum_{e \in \delta^-(v)} & x_e = 1 & \forall v \in V \\
\sum_{e \in \delta^+(W)} & x_e \geq 1 & \forall \emptyset \neq W \subset V \\
& x_e \in \{0,1\} & \forall e \in e
\end{aligned}
$$

Sub:

$$
\begin{aligned}
\min\ & c^\top x & \\
s.t. \sum_{e \in \delta^+(v)} & x_e = 1 & \forall v \in V \\
\sum_{e \in \delta^-(v)} & x_e = 1 & \forall v \in V \\
\sum_{e \in W \times W)} & x_e \leq |W| - 1 & \forall W \subset V \\
& x_e \in \{0,1\} & \forall e \in E
\end{aligned}
$$

Zeigt, dass die LP-Relaxationen von Cut und Sub äquivalent sind.

Aufgabe 42 — 6 Punkte

Bezeichne K_n den vollständigen ungerichteten Graphen auf n Knoten. Beweist folgendes Lemma, welches für den Beweis verwendet werden kann, dass das Polytop, das die konvexe Hülle aller Touren in K_n beschreibt, genau Dimension $\frac{n(n-3)}{2}$ hat:

Für jedes $k \geq 1$ gilt

(a) Die Kantenmenge von K_{2k+1} kann in k disjunkte Touren partitioniert werden.

(b) Die Kantenmenge von K_{2k} kann in $k - 1$ disjunkte Touren und ein perfektes Matching partitioniert werden.

Aufgabe 43 **7 Punkte**

Zeigt, dass folgende Ungleichungen für das 2-Matching Polytop eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$ gültig sind:

$$\sum_{e \in X \times X \cup F} x_e \leq |X| + \frac{|F| - 1}{2} \qquad\qquad X \subseteq V, F \subseteq \delta(X), |F| \text{ ungerade.}$$

Beachtet, dass die Gleichung oben nur eine andere Schreibweise für (8.4) aus der Vorlesung ist, in der auf die Bedingung verzichtet wird, dass F ein Matching ist.