Technische Universität Berlin **WS 08/09**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 7-4 / Frau Siwak

Prof. Dr. Deuschel
Dipl.-Math. oec. Wittmüß

1. Übung
Stochastische Modelle

Abgabe: 30.10.2008 (in der Übung)

1. Aufgabe (5 Punkte)

a) Berechnen Sie die charakteristische Funktion einer Poisson-verteilten Zufallsvariablen. Nutzen Sie die Lösung, um zu beweisen:

$$X \sim \text{ Pois}(\mu),\ Y \sim \text{ Pois}(\lambda) \text{ unabhängig } \Rightarrow X + Y \text{ Pois}(\mu + \lambda).$$

b) Der Zufallsvektor $X = (X_1, \ldots, X_d)$ sei normalverteilt in $\mathbb{R}^d$ mit Erwartungswertvektor $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_d)$ und Kovarianzmatrix Σ, d.h. für $t = (t_1, \ldots, t_d)$ ist die charakteristische Funktion gegeben durch

$$\psi_X(t) = E\left[e^{i\langle t,X\rangle}\right] = e^{i\langle t,\mu\rangle - \frac{1}{2}\langle t,\Sigma t\rangle}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $\alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ die Zufallsvariable

$$\alpha_1 X_1 + \ldots \alpha_d X_d$$

normalverteilt in $\mathbb{R}$ ist. (Beachten Sie, dass Unkorrelliertheit und damit die Unabhängigkeit der Komponenten des Vektors X nicht angenommen wurde.)

2. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei (X_n) eine inhomogene Markovkette mit Zustandsraum S und Übergangswahrscheinlichkeiten $(p^n_{ij})_{(i,j)\in S\times S, n\in\mathbb{N}}$. Wobei $p^n_{ij} = P[X_n = j \mid X_{n-1} = i]$ ist. Man gebe einen Zustandsraum T und die Übergangswahrscheinlichkeiten einer homogenen Markovkette (Y_n) an, die in einer eins-zu-eins-Beziehung zu (X_n) steht.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $(E, \mathcal{E})$ ein meßbarer Raum, wobei die Menge E höchstens abzählbar ist. Eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von E-wertigen Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ wird *Markovkette r-ter Ordnung* genannt, falls für alle $B \in \mathcal{E}$ und alle ganzzahligen $n \geq r - 1$

$$P\left(X_{n+1} \in B | \sigma(X_m, m \leq n)\right) = P\left(X_{n+1} \in B | \sigma(X_m, n - r + 1 \leq m \leq n)\right).$$

Beweisen Sie, dass die Folge $Y_n := (X_n, \ldots, X_{n+r-1})$ eine E^r-wertige Markovkette im gewöhnlichen Sinne ist.