Technische Universität Berlin **WS 08/09**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 7-4 / Frau Siwak

Prof. Dr. Deuschel
Dipl.-Math. oec. Wittmüß

10. Übung
Stochastische Modelle

Abgabe: 22.1.2009 (in der Übung)

1. Aufgabe (5 Punkte)
Es sei $\lambda\mu > 0$ und sei X eine Markovkette auf $\{1, 2\}$ mit Generator (Q-Matrix)

$$G = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie mit Hilfe von Vorwärtsgleichungen die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2$.

b) Lösen Sie die Gleichung $\pi G = 0$ um die stationäre Verteilung zu finden. Zeigen Sie, dass $p_{ij}(t) \to \pi_j$ für $t \to \infty$.

c) Bestimmen Sie für die Markovkette

   (i) $P[X_t = 2 | X_0 = 1, X_{3t} = 1]$,

   (ii) $P[X_t = 2 | X_0 = 1, X_{3t} = 1, X_{4t} = 1]$.

2. Aufgabe (5 Punkte)
Betrachten Sie einen reinen Todesprozess mit Rate $\mu > 0$ für den Übergang $i \to i - 1$, $i \geq 1$. Berechnen Sie die Übergangswahrscheinlichkeit $p_{ij}(t)$.

3. Aufgabe (5 Punkte)
Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Markovkette in stetiger Zeit, Zustandsraum $E = \{1, 2, 3\}$ und infinitesimaler Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Geben Sie eine Markovkette in diskreter Zeit $(\hat{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und einen unabhängigen Poissonprozess $(N_t)_{t\geq 0}$ an, so dass $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(\hat{X}_{N_t})_{t\geq 0}$ die gleichen Verteilungen haben.