Technische Universität Berlin **WS 08/09**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 7-4 / Frau Siwak

Prof. Dr. Deuschel
Dipl.-Math. oec. Wittmüß

11. Übung
Stochastische Modelle

Abgabe: 29.1.2009 (in der Übung)

1. Aufgabe (5 Punkte)
Seien $T_1, T_2, \dots$ Sprungzeiten eines Poissonprozesses auf $\mathbb{R}_+$ mit Intensität $\lambda > 0$. Sei $p : \mathbb{R}_+ \to [0,1]$ eine Funktion, die auf endlichen Intervallen integrierbar ist. Angenommen wir behalten die Sprungzeit T_i unabhängig von den anderen mit Wahrscheinlichkeit $p(T_i)$ bei und löschen sie mit Wahrscheinlichkeit $1 - p(T_i)$. Zeigen Sie: Die übriggebliebenen (umnummerierten) Sprungzeiten $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \dots$ sind Sprungzeiten eines inhomogenen Poissonprozesses mit Intensität $\lambda p(s)$. Das ist die *Thinning-Eigenschaft* von Poissonprozessen.

2. Aufgabe (5 Punkte)
Betrachten Sie eine Markovkette in stetiger Zeit mit Ratenmatrix

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Übergangshalbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$. Bestimmen Sie die invariante Verteilung (π_1, π_2, π_3) als Linkseigenvektor von Q zum Eigenwert 0 und überzeugen Sie sich davon, dass $p_t(i,j) \to \pi_j$ für $t \to \infty$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$ gilt.

3. Aufgabe (5 Punkte)
Betrachten Sie eine Markovkette in stetiger Zeit mit Ratenmatrix

$$Q = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Übergangshalbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$. Bestimmen Sie die invariante Verteilung (π_1, π_2, π_3) als Linkseigenvektor von Q zum Eigenwert 0.