Technische Universität Berlin **WS 08/09**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 7-4 / Frau Siwak

Prof. Dr. Deuschel
Dipl.-Math. oec. Wittmüß

12. Übung
Stochastische Modelle

Abgabe: 5.2.2009 (in der Übung)

1. Aufgabe (5 Punkte)
Wir betrachten einen reinen Geburtsprozess mit Raten

a) $\lambda_n = \lambda > 0$,

b) $\lambda_n = n\lambda$ und

c) $\lambda_n = n^2\lambda$.

Wie groß ist jeweils die Wahrscheinlichkeit, dass die Markovkette explodiert?

2. Aufgabe (5 Punkte)
Betrachten Sie einen Geburts- und Todesprozess X mit Geburtsraten $\lambda_n = n\lambda$ und Todesraten $\mu_n = n\mu$ für alle $n \geq 0$. Wir setzen

$$\eta(t) = P[X(t) = 0 | X(0) = 1].$$

Zeigen Sie, dass η folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\eta'(t) + (\lambda + \mu)\eta(t) = \mu + \lambda\eta(t)^2.$$

Berechnen Sie $\eta(t)$ und $P[X(t) = 0 | X(u) = 0]$ für $0 < t < u$.

3. Aufgabe (5 Punkte)
Es sei $(X_t)_{t\geq 0}$ eine Markovkette in stetiger Zeit auf einem abzählbarem Zustandsraum E. Für den Generator G nehmen wir an $g_i = -g_{ii} \in (r, R)$ für alle $i \in E$, wobei $0 < r \leq R < \infty$. Für $A \subset E$ definieren wir $H_A = \inf\{t \geq 0 : X(t) \in A\}$, $\eta_j = P[H_A < \infty | X(0) = j]$ und $\mu_j = E[H_A | X(0) = j]$. Zeigen Sie:

a) $\sum_{k\in E} g_{jk}\eta_k = 0$ für alle $j \notin A$,

b) $(\mu_j)_{j\in E}$ ist die minimale nicht-negative Lösung von

$$\mu_j = 0 \quad \text{falls } j \in A, \qquad 1 + \sum_{k\in E} g_{jk}\mu_k = 0 \quad \text{falls } j \notin A$$