Technische Universität Berlin **WS 08/09**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 7-4 / Frau Siwak

Prof. Dr. Deuschel
Dipl.-Math. oec. Wittmüß

2. Übung
Stochastische Modelle

Abgabe: 6.11.2008 (in der Übung)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei $X = (X_n : n \in \mathbb{N})$ eine Markovkette mit abzählbarem Zustandsraum E. Die Startverteilung sei gegeben durch δ_i, wobei i ein positiv rekurrenter Zustand sei. Wir definieren eine Folge von Rückkehrzeiten nach i durch

$$R_i^1 = \inf\{n > 0 \,|\, X_n = i\} \quad \text{und} \quad R_i^{k+1} = \inf\{n > R_i^k \,|\, X_n = i\},\ k \geq 1.$$

Zeigen Sie:

a) $R_i^1, R_i^2, \ldots$ ist eine Folge von Stoppzeiten.

b) $R_i^1, R_i^2 - R_i^1, R_i^3 - R_i^2, \ldots$ ist eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen.

2. Aufgabe (5 Punkte)

In der Situation der 1. Aufgabe definieren wir die k-te Exkursion von i als

$$\{Y_n = X_{R_i^{k-1}+n} \,|\, 0 \leq n \leq R_i^k - R_i^{k-1}\}.$$

Man zeige, dass $E_i^1, E_i^2, E_i^3, \ldots$ i.i.d. ist.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $E = \{1, 2, 3\}$ und Übergangsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1-2p & 2p & 0 \\ p & 1-2p & p \\ 0 & 2p & 1-2p \end{pmatrix},$$

wobei $p \in (0, \frac{1}{2})$ gelte.

a) Berechnen Sie $p_{i,j}^n$ für alle $i, j \in E$ und $n \in \mathbb{N}$.

b) Berechnen Sie die mittleren Rückkehrzeiten $t_i := E_i\left[R_i^1\right]$, wobei R_i^1 wie in der 1. Aufgabe definiert ist.