Technische Universität Berlin **WS 08/09**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 7-4 / Frau Siwak

Prof. Dr. Deuschel
Dipl.-Math. oec. Wittmüß

3. Übung
Stochastische Modelle

Abgabe: 13.11.2008 (in der Übung)

1. Aufgabe (5 Punkte)
Es sei $X_1, X_2, X_3 \ldots$ eine Folge unabhängiger identisch verteilter Zufallsvariablen mit

$$P[X_1 = 1] = p, \text{ und } P[X_1 = -1] = q = 1 - p, \quad p \in (0, 1).$$

Seien ferner $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ und $M_n = \max\{S_k \,|\, 0 \leq k \leq n\}$.

a) Zeigen Sie, dass $Y_n = M_n - S_n$ eine Markovkette ist und bestimmen Sie ihre Übergangsmatrix.

b) Zeigen Sie, dass $M_n = Y_n + S_n$ keine Markovkette ist. (Also: die Summe zweier Markovketten muss nicht eine Markovkette sein.)

2. Aufgabe (5 Punkte)
Sei X eine Markovkette mit höchstens abzählbarem Zustandsraum E und Übergangsmatrix P. Die Zustände e_1 und e_2 seien absorbierend. Für alle $e \in E$ gelte $e \to e_1$ oder $e \to e_2$.

a) Zeigen Sie, dass alle Zustände außer e_1 und e_2 transient sind.

b) Bestimmen Sie eine Familie $(\pi^\alpha = (\pi_i^\alpha)_{i \in E})_{\alpha \in [0,1]}$ von Wahrscheinlichkeitsvektoren auf E (d.h. $\sum_{i \in E} \pi_i^\alpha = 1$) mit der Eigenschaft $\pi^\alpha = \pi^\alpha P$ für alle $\alpha \in [0, 1]$.

Bemerkung: Ein Zustand i heißt *absorbierend*, wenn aus $i \to j$ stets $i = j$ folgt.

3. Aufgabe (5 Punkte)
In einem Büro stehen drei Geräte, von denen jeden Tag jedes mit Wahrscheinlichkeit 0.1 ausfällt. Dabei nehmen wir an, dass an einem Tag höchstens ein Gerät ausfallen kann. Gibt es mindestens ein kaputtes Gerät, kann mit Wahrscheinlichkeit 0.5 ein Gerät repariert werden. Die Anzahl der funktionierenden Geräte am Tag n kann als Geburts- und Todeskette angesehen werden. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix und die stationäre Verteilung dieser Kette.