Technische Universität Berlin **WS 08/09**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 7-4 / Frau Siwak

Prof. Dr. Deuschel
Dipl.-Math. oec. Wittmüß

4. Übung
Stochastische Modelle

Abgabe: 20.11.2008 (in der Übung)

Die Aufgabe muss nicht abgegeben werden, sondern ist "nur" die Aufgabe, auf die sich Aufgabe 4 (ehemals 3) bezieht.

1. Aufgabe (0 Punkte)
(Irrfahrt auf dem m-dimensionalen Würfel) Sei $X = \{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Markovkette mit Zustandsraum $E = \{0,1\}^m$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{m} & \text{falls } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Ist X irreduzibel? Aperiodisch?

b) Berechnen Sie die invariante Verteilung von X.

2. Aufgabe (5 Punkte)
Betrachten Sie die Markov Kette mit Zustandsraum $\{0, 1, 2, \dots\}$ und Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(m, m+1) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m+2}\right), \quad \text{für } m \geq 0$$
$$p(m, m-1) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m+2}\right) \quad \text{für } m \geq 1$$

und $p(0,0) = 1 - p(0,1) = 3/4$. Bestimmen Sie die stationäre Verteilung. Ist die Markovkette reversibel?

3. Aufgabe (5 Punkte)
Es sei eine Markovkette (X_n) mit Zustandsraum E, Übergangsmatrix $P = (p(i,j))$ und invarianter Verteilung π gegeben. Wir nehmen an, dass $\pi_j > 0$ für alle $j \in E$. Dann definieren wir $p^*(i,j) = \pi_j p(j,i)/\pi_i$ und den zeitumgekehrten Prozess $(R_X^N)_k = X_{N-k}$ für $k = 0, \dots, N$.

Man zeige, dass die Verteilung der Zeitumgekehr der Markovkette mit Startverteilung π gerade durch $(p^*(i,j))$ gegeben ist, d.h.

$$P_\pi \circ (R_X^N)^{-1} = P_\pi^*.$$

4. Aufgabe (5 Punkte)
Es seien m numerierte Kugeln in 2 Urnen verteilt. In jedem Schritt wird eine Zahl aus $\{1, \dots, m\}$ zufällig (uniform und unabhängig) gewählt und die Kugel mit dieser Nummer wird aus der Urne, in der Sie sich befindet rausgeholt und in die andere gelegt. Der Zustand des Systems wird durch die Anzahl Y_n der Kugeln in der ersten Urne nach dem n-ten Schritt beschrieben.

a) $Y = \{Y_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ ist offenbar eine Markovkette mit Zustandsraum $E = \{0, 1, \ldots, m\}$. Geben Sie die Übergangsmatrix von Y an.

b) Berechnen Sie die invariante Verteilung von Y.
(Hinweis: Bestimmen Sie eine Funktion $h : \{0, 1\}^m \to \{0, 1, \ldots, m\}$ so dass $h(X) = \{h(X_n) : n \in \mathbb{N}_0\}$ die gleiche Verteilung wie Y hat, wobei X die Irrfahrt aus Aufgabe 1 ist.)

c) Ist Y reversibel bezüglich der invarianten Verteilung?