**Technische Universität Berlin** **WS 08/09**
**Institut für Mathematik**
Sekr. MA 7-4 / Frau Siwak

Prof. Dr. Deuschel
Dipl.-Math. oec. Wittmüß

# 5. Übung
# Stochastische Modelle

**Abgabe: 27.11.2008** (in der Übung)

**1. Aufgabe** (5 Punkte)
Es sei $P$ die Übergangsmatrix einer Markovkette auf einem endlichen Zustandsraum $E$. Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte der Übergangsmatrix

$$\tilde{P} = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}I$$

nicht-negativ sind. Dabei bezeichet $I$ die Einheitsmatrix.

**2. Aufgabe** (5 Punkte)
Sei $P = (p_{i,j})_{i,j \in E}$ eine stochastische Matrix auf $E = \{0, \dots, N\}$ mit $p_{i,j} = 0$ für $|i-j| \geq 2$ und $p_{i,i+1} > 0$ für $i \in \{1, \dots N-1\}$. Es gelte $p_{0,0} = p_{N,N} = 1$, d.h. die Zustände 0 und $N$ sind absorbierend. Wenn $\{X_n | n \in \mathbb{N}_0\}$ eine Markovkette auf $E$ ist mit Übergangsmatrix $P$, dann sei $\tau_i = \inf\{n \in \mathbb{N} | X_n = i\}$ die Ersteintrittzeit in $i \in E$. Ferner sei $u_i = P_i[\tau_N < \tau_0]$ die Wahrscheinlichkeit, dass die in $i$ gestartete Kette in $N$ (und nicht in 0) schließlich absorbiert wird. Zeigen Sie:

a) Der Vektor $(u_i)_{i \in E}$ ist ein Rechtseigenvektor der Matrix $P$ zum Eigenwert 1.

b) Mit $\rho_j = \prod_{k=1}^{j} \frac{p_{k,k-1}}{p_{k,k+1}}$ für $j \in E \setminus \{N, 0\}$ und $\rho_N = 0, \rho_0 = 1$ gilt die Formel

$$u_i = \frac{\sum_{j=0}^{i-1} \rho_j}{\sum_{j=0}^{N} \rho_j} \text{ für alle } i \in E \ .$$

c) Die in 0 gestartete symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ besucht mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{N+1}$ den Punkt $N$, bevor Sie die Menge $-\mathbb{N}$ erreicht.

**3. Aufgabe** (5 Punkte)
Wir betrachten eine Markovkette, deren Zustandsraum der diskrete Torus $E = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$ ist (Addition und Subtraktion werden modulo $N$ betrachtet) und deren Übergangswahrscheinlichkeiten folgender Bedingung genügen:

$$p_{i,j} = q(i-j), \text{ mit } q(i) \geq 0 \text{ und } \sum_{i \in E} q(i) = 1.$$

Man zeige Folgendes.

a) Die invariante Verteilung ist durch $\pi_i = 1/N$ gegeben.

b) Es gilt $p^*_{i,j} = p_{j,i}$.

c) $P$ ist normal, dass heisst $PP^* = P^*P$.