Technische Universität Berlin **WS 08/09**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 7-4 / Frau Siwak

Prof. Dr. Deuschel
Dipl.-Math. oec. Wittmüß

6. Übung
Stochastische Modelle

Abgabe: 4.12.2008 (in der Übung)

1. Aufgabe (5 Punkte)
Es sei $\pi \in S_1(P)$ und $-1 \leq \lambda_{N-1} \leq \ldots \leq \lambda_1 \leq \lambda_0 = 1$ seien die Eigenwerte von P. Man beweise jeweils die nicht in der Vorlesung bewiesene Implikation der folgenden Aussagen.

a) P ist irreduzibel genau dann, wenn $\lambda_1 < 1$.

b) P ist aperiodisch genau dann, wenn $\lambda_{N-1} > -1$.

2. Aufgabe (5 Punkte)
Wir betrachten den Zustandsraum E auf dem ein bezüglich der Übergangsmatrix P invariantes Maß π gegeben sei. Wir zerlegen den Zustandsraum in die Mengen $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$, wobei $B_k \cap B_j = \emptyset$ für $k \neq j$ und $0 < \pi(B_k) < \infty$ für alle k.

Wir definieren eine Übergangsmatrix auf $\{B_1, B_2, \ldots\}$ durch

$$\hat{p}_{k,j} = \sum_{x\in B_k} \frac{\sum_{y\in B_j} \pi(x)p_{x,y}}{\hat{\pi}_k}, \text{ wobei } \hat{\pi}_k = \pi(B_k).$$

Man zeige

a) $\hat{\pi}$ ist ein invariantes Maß für $\hat{P}$.

b) Falls P symmetrisch bezüglich π ist, so ist $\hat{P}$ symmetrisch bezüglich $\hat{\pi}$.

c) Sei π ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmaß, wie kann man dann $\hat{P}$ schreiben?

d) Sei P die Übergangsmatrix für die Irrfahrt (X_n) auf dem Graphen (E, K). (D.h. X_{n+1} ist mit gleicher Wahrscheinlichkeit einer der Nachbarn von X_n.)

   Wie kann man dann $\hat{P}$ interpretieren? Welcher Zusammenhang besteht zwischen $\lambda_1(P)$ und $\lambda_1(\hat{P})$? (D.h. $\leq$ oder $\geq$)

3. Aufgabe (5 Punkte)
Betrachten Sie die Irrfahrt auf $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ mit reflektierenden Rändern, d.h. $p(i, i+1) = p(i, i-1) = 1/2$ für $1 \leq i \leq n-2$, $p(0, 1) = 1$ und $p(n-1, n-2) = 1$. Berechnen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Übergangsmatrix. Wie sieht die invariante Verteilung aus? Mit welcher Konvergenzrate konvergiert (bez. Variationsabstand) $P^{(n)}_{i,\cdot}$ gegen die invariante Verteilung?