Technische Universität Berlin **WS 08/09**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 7-4 / Frau Siwak

Prof. Dr. Deuschel
Dipl.-Math. oec. Wittmüß

7. Übung
Stochastische Modelle

Abgabe: 11.12.2008 (in der Übung)

1. Aufgabe (5 Punkte)

Es sei Σ die Menge der Permutationen von $\{1, 2, \ldots, n\}$. Wir definieren n Elemente $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$ durch

$$\sigma_k(l) = \begin{cases} l & \text{falls } l < k \ , \\ l+1 & \text{falls } k \leq l < n \ , \\ k & \text{falls } l = n \ . \end{cases}$$

Es sei μ die Gleichverteilung auf $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$. Wir betrachten die stochastische Matrix $P = (p_{\sigma,\tau})_{\sigma,\tau\in\Sigma}$, die gegeben ist durch $p_{\sigma,\tau} = \mu(\tau \circ \sigma^{-1})$. Zeigen Sie, dass die Markovkette mit Übergangsmatrix P irreduzibel und aperiodisch ist.

2. Aufgabe (5 Punkte)

(Programmieraufgabe) Simulieren Sie eine $M/M/1$-Warteschlange mit Parametern λ und μ. Das heißt, dass die Zwischenankunftszeiten der Kunden exponentialverteilt mit Parameter λ seien und sie außerdem annehmen, dass sie einen sehr eigenartigen Bediener haben, der es schafft, eine exponentialverteilte Bedienzeit mit Parameter μ zu produzieren. Simulieren Sie die Warteschlangenlänge für

a) $\lambda = 1$ und $\mu = 2$

b) $\lambda = 2$ und $\mu = 1$

c) $\lambda = \mu = 1$

jeweils 100 Mal zur Zeit $t = 100$ und kommentieren Sie die berechneten empirischen Mittelwerte. Für wie realistisch halten sie dieses Modell?

3. Aufgabe (2 Punkte)

Es seien (X_n^1) und (X_n^2) reversible Markovketten auf den endlichen Zustandsräumen E_1 und E_2 mit Übergangsmatrizen P_1 und P_2 und mit invarianten Verteilungen π_1 und π_2. Wir betrachten nun eine Markovkette $(\hat{X}_n)$ mit Übergangsmatrix $\hat{P} = P_1 \otimes P_2$.

a) Man berechne die invariante Verteilung bezüglich $\hat{P}$.

b) Was ist $\hat{\lambda}_1$?

4. Aufgabe (3 Punkte)

Es wurde gezeigt, dass die Aussterbewahrscheinlichkeit einer Population gerade der kleinste positive Fixpunkt der erzeugenden Funktion ist, die die Verteilung der Anzahl von Nachkommen eines Individuums gibt. Man gebe an, wie sich die Aussterbewahrscheinlichkeit verhält, falls die Anzahl an Nachkommen

a) Poisson-verteilt zum Parameter μ ist,

b) geometrisch verteilt zum Parameter p ist.