Technische Universität Berlin **WS 08/09**
Institut für Mathematik
Sekr. MA 7-4 / Frau Siwak

Prof. Dr. Deuschel
Dipl.-Math. oec. Wittmüß

8. Übung
Stochastische Modelle

Abgabe: 8.1.2009 (in der Übung)

1. Aufgabe (5 Punkte)
Verallgemeinern Sie das Beispiel 2.3 auf S. 48 in Diaconis and Stroock (1991) auf den Fall p-adischer Bäume, $p \geq 2$, der Tiefe $d \geq 1$.

2. Aufgabe (5 Punkte)
Betrachten Sie die einfache Irrfahrt auf dem Torus $T_N = \{0, \ldots, N-1\}$, wobei N ungerade sei. In der Übung haben wir uns Beispiel 2.1 aus Diaconis and Stroock (1991) angeschaut. Wie ändert sich die obere Schranke an β_1 falls

a) eine Kante hinzugefügt wird?

b) eine Kante weggelassen wird?

3. Aufgabe (5 Punkte)
Wir betrachten die Zykel einer endlichen Markovkette mit strikt positiver invarianter Verteilung.

Ein Zykel C der Länge n ist eine Folge $(i_0, i_1, \ldots, i_n)$, wobei $p_{i_m, i_{m+1}} > 0$, $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}$ paarweise verschieden sind und $i_0 = i_n$. Wir sagen, $j \in C$, falls es ein $m \in \{0, \ldots, n-1\}$ gibt, so dass $i_m = j$. Ausserdem identifizieren wir C mit der Menge seiner gerichteten Kanten: $C = ((i_0, i_1), \ldots, (i_{n-1}, i_n))$. Dementsprechend ist $(j_1, j_2) \in C$, falls es ein $m \in \{0, \ldots, n-1\}$ gibt, so dass $j_1 = i_m$ und $j_2 = i_{m+1}$.

Es seien $C_1, C_2, \ldots, C_N$ die Zykeln der Markovkette. Es seien ein Maß π auf E und Gewichte $w_1, \ldots, w_N$ gegeben so, dass

$$p_{ij} = 1/\pi_i \sum_k w_k I_{\{(i,j) \in C_k\}}.$$

a) Man beweise, dass π ein invariantes Maß ist.

b) Man bestimme P^*.

c) Man zeige, dass $P = P^*$ genau dann, wenn alle Zyklen die Länge 2 haben.