Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2009/10

Analysis II

1.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 28. / 29. Oktober

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Bestimmen Sie durch Approximation mit Treppenfunktionen die folgenden Integrale.

(i) $\int_a^b e^x dx$.
Hinweis: Betrachten Sie zum Beispiel die Zerlegung $t_k := a + (b-a)k/n$, $k = 0, \dots, n$.

(ii) $\int_1^x 1/t dt$, $x > 1$.
Hinweis: Betrachten Sie zum Beispiel die Zerlegung $t_k := x^{k/n}$, $k = 0, \dots, n$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Es sei $\lambda > 0$ und $f : [\lambda a, \lambda b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Beweisen Sie mittels Approximation durch Treppenfunktionen

$$\int_{\lambda a}^{\lambda b} f(x)dx = \lambda \int_a^b f(\lambda x)dx.$$

Aufgabe 3: **5 Punkte**

(i) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$ und

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Zeigen Sie, daß dann $f(x) = 0$ ist für alle $x \in [a, b]$.

(ii) Ist die Behauptung in (i) auch richtig, wenn f nur eine Regelfunktion ist und nicht notwendigerweise stetig?

(iii) Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie: Gilt

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

für alle stetigen Funktionen $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, so folgt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

(i) Sei $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ das Polynom ersten Grades, das durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ geht. Bestimmen Sie

$$\int_a^b g(x)dx$$

in Abhängigkeit von $a, b, f(a)$ und $f(b)$.

(ii) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\{x_i\}_{i=0,\ldots,n}$ die äquidistante Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ in n Teile, das heisst, $x_i = a + \frac{i}{n}(b - a)$. Sei h diejenige stetige Funktion, die auf jedem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n - 1$, ein Polynom ersten Grades ist und für die $f(x_i) = h(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$ gilt.
Bestimmen Sie

$$T_f(n) := \int_a^b h(x)dx$$

in Abhängigkeit von $a, b, n, f(x_i), i = 0, \ldots, n$.

(iii) Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} T_f(n) = \int_a^b f(x)dx.$$