Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2009/10

Analysis II

10.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 13. / 14. Januar

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Sei

$$f : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß f nicht über $[-1,1]^2$ integrierbar ist, daß aber trotzdem

$$\int_{[-1,1]} \Big(\int_{[-1,1]} f(x,y) dx \Big) dy = \int_{[-1,1]} \Big(\int_{[-1,1]} f(x,y) dy \Big) dx.$$

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Gegeben sei eine Folge (g_n) von stetigen Funktionen $g_n : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ mit

$$\operatorname{supp}(g_n) := \overline{\{x \in \mathbb{R} \,:\, g_n(x) \neq 0\}} \subset (n, n+1)$$

und $\int_n^{n+1} g_n(x) dx = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto f(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \big(g_n(x) - g_{n+1}(x) \big) g_n(y).$$

Zeige, daß f auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist, aber

$$\int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dx \Big) dy \neq \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}} f(x,y) dy \Big) dx.$$

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Integrieren Sie die Funktion $f : [1,2] \times [2,3] \times [0,2] \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \frac{2z}{(x+y)^2}$.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Beweisen Sie folgende einfache Version des Satzes von Gauß:
Es sei $Q = \bigtimes_{j=1}^{d} [a_j, b_j] \subset \mathbb{R}^d$ ein kompakter Quader und $v : Q \to \mathbb{R}^d$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_Q \operatorname{div} v(x) dx = \sum_{i=1}^{d} \Big(\int_{\widetilde{Q}_i} v_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \ldots, x_d) - v_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, a_i, x_{i+1}, \ldots, x_d) d\widetilde{x}_i \Big).$$

Hier ist $\widetilde{Q}_i := \bigtimes_{j=1, j\neq i}^{d} [a_j, b_j]$ und $d\widetilde{x}_i := d(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d)$.
Die rechte Seite wird üblicherweise in der deutlich übersichtlicheren Form

$$\int_{\partial Q} v(x) \cdot n(x) dx$$

geschrieben, wobei für einen Punkt $x \in \partial Q$ der Vektor $n(x)$ der sogenannte äußere Einheitsnormalenvektor ist, das heißt der Vektor, der senkrecht auf ∂Q steht, normiert ist und nach außen zeigt. Man mache sich anschaulich klar, wie diese einzelnen Objekte in unserem Fall aussehen und warum in der Tat beide Ausdrücke übereinstimmen.

Aufgabe 5: **3 Punkte**

Es sei $Q \subset \mathbb{R}^d$ ein kompakter Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $\xi \in Q$ mit $\int_Q f(x)dx = f(\xi)V(Q)$.