Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2009/10

Analysis II

11.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 20. / 21. Januar

Aufgabe 1: **5 Punkte**

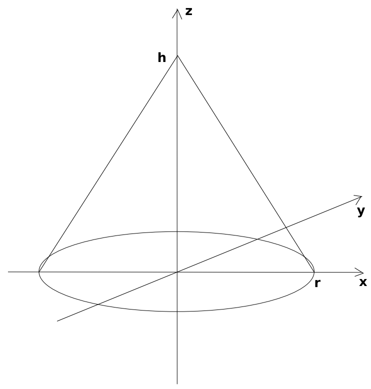
Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$ offen, nichtleer und beschränkt.

(i) Zeigen Sie, daß die Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ über A integrierbar ist. Wir nennen $V(A) := \int_A 1dx$ das Volumen von A. Kann $V(A) = 0$ sein?

(ii) Zeigen Sie, daß die Koordinatenfunktionen $x_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $(x_1, \dots, x_d) \mapsto x_j$ für alle $j = 1, \dots, d$ über A integrierbar sind. Wir nennen

$$(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_d), \quad \overline{x}_j := \frac{1}{V(A)} \int_A x_j dx$$

den *Schwerpunkt* von A.



(iii) Bestimmen Sie den Schwerpunkt eines Kegels mit Radius r und Höhe h im $\mathbb{R}^3$.
Hinweis: Geometrische Überlegungen erleichtern das rechnen!

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Es ist jeweils das Integral $\int_A f dx$ zu berechnen.

(i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) := xyz$ und $A \subset \mathbb{R}^3$ sei der Teil der Kugel mit Radius $R > 0$ um den Ursprung, welcher im ersten Oktanten (des kartesischen Systems) liegt.

(ii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) := \cos(z/y)$ und $A \subset \mathbb{R}^3$ sei definiert durch die Ungleichungen $\pi/6 \leq y \leq \pi/2$, $y \leq x \leq \pi/2$, $0 \leq z \leq xy$.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind (selbstverständlich jeweils mit Begründung.)

(i) Es sei $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine Lipschitz-stetige Funktion[1] und $N \subset \mathbb{R}^d$ eine Nullmenge. Dann ist auch $f(N)$ eine Nullmenge.

(ii) Eine Nullmenge hat keine inneren Punkte.

[1] Erinnerung: f ist Lipschitz-stetig, falls es eine Konstante $L \geq 0$ gibt, so daß für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ $\|f(x) - f(y)\|_2 = |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| = L\|x - y\|_2$ gilt. Äquivalent hierzu ist, daß es $\tilde{L} \geq 0$ gibt mit $\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq \tilde{L}\|x - y\|_\infty$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ (Warum?). Dies könnte hier helfen.
Auch kann es hilfreich sein zu zeigen, daß man die Quader in den Überdeckungen stets als Würfel wählen kann.

(iii) Der Rand einer Menge ist eine Nullmenge.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Wir definieren iterativ folgende Mengen:

$$\begin{aligned}
C_0 &:= [0,1] \\
C_1 &:= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\
C_2 &:= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Es entsteht also C_{k+1} aus C_k, indem man von jedem der Teilintervalle von C_k das mittlere (offene) Drittel entfernt. Es ist dann offenbar $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots$. Wir definieren das sogenannte *Cantorsche Diskontinuum* durch

$$C := \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k \subset [0,1].$$

(i) Berechnen Sie das (eindimensionale) Volumen von C_k, also $V(C_k)$.

(ii) Zeigen Sie, daß C eine abgeschlossene Nullmenge in $\mathbb{R}$ ist.

(iii) Zeigen Sie schließlich, daß C überabzählbar ist. Es gibt somit also überabzählbare Nullmengen in $\mathbb{R}$.
Hinweis: Hierzu gibt es mehrere Möglichkeiten. Sie können zum Beispiel annehmen, daß C abzählbar sei und somit in der Form $C = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ dargestellt werden kann. Es gibt dann ein Teilintervall I_1 von C_1, in dem x_1 nicht liegt. Weiter gibt es ein Teilintervall I_2 von $I_1 \cap C_2$, in dem x_2 nicht liegt usw. Ausgehend von dieser Konstruktion können Sie zu einem Widerspruch gelangen.