Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2009/10

Analysis II

12.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 27. / 28. Januar

Aufgabe 1: **5 Punkte**

(i) Beweisen Sie die Leibnizsche Sektorformel:
Es sei $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$ und $f : [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$ stetig. Dann gilt für den in Polarkoordinaten von den Strahlen $\phi = \alpha$, $\phi = \beta$ und der Funktion $r = f(\phi)$ begrenzten Sektor $S_{\alpha,\beta,f}$:

$$V(S_{\alpha,\beta,f}) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\phi)d\phi.$$

(ii) Beweisen Sie die Guldinsche Regel: Sei $A \subset \mathbb{R}^2_+$ eine beschränkte, offene Teilmenge der rechten Halbebene $\mathbb{R}^2_+ = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 0\}$. Sei weiterhin R die y-Koordinate des Schwerpunktes (vgl. 11. Blatt) von A und M der Rotationskörper, der durch Rotation von A um die z-Achse in $\mathbb{R}^3$ entsteht:

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (\sqrt{x^2+y^2}, z) \in A\}.$$

Zeige:

$$V(M) = 2\pi R V(A).$$

Aufgabe 2: **5 Punkte**

(i) Berechnen Sie den Flächeninhalt des von der sogenannten Lemniskate $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$ begrenzten, beschränkten Bereiches. Skizzieren Sie diesen Bereich.

(ii) Sei $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x > 0,\, y > 0,\, \sqrt{x} < y < 3\sqrt{x},\, x < y < 2x\}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt von B durch Einführung geeigneter Koordinaten.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

E sei $p \in \mathbb{R}^{d+1}$ und $A \subset \mathbb{R}^d$ offen mit $V(A) < \infty$. Zeigen Sie, daß dann der Kegel $K(A,p)$ über der Grundfläche A mit Spitze in p endliches Volumen $V(K(A,p))$ hat und daß

$$V(K(A,p)) = \frac{h}{d+1}V(A)$$

ist, wobei h die Höhe des Kegels, also der Abstand von p zu $\mathbb{R}^d \times \{0\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$ ist.

Aufgabe 4: **6 Punkte**

(i) Sei $I := [0,1]^3$ der Einheitswürfel im $\mathbb{R}^3$ und

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x,y,z \geq 0,\, x+y+z \leq 1\}.$$

  (a) Zeigen Sie, daß die Abbildung $g : I \to \mathbb{R}^3$, $g(u,v,w) := (u-uv, uv-uvw, uvw)$ den Würfel I surjektiv auf S abbildet und im Inneren von I injektiv ist.

  (b) Skizzieren Sie S und berechnen Sie das Volumen $V(S)$ mittels des Transformationssatzes und (a).

  (c) Berechnen Sie den Schwerpunkt von S (vgl. 11. Übungsblatt.)

(ii) Berechnen Sie das Volumen des Schnittes D von $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ und $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2+z^2 \leq 3R^2/4 + Rz\}$.