Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2009/10

Analysis II

13.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 3. / 4. Februar

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Es sei $M \subset \mathbb{R}^{m-1}$ kompakt , ∂M eine Nullmenge und $\mathring{M}$ zusammenhängend. Sei weiter $f : M \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Es sei $F \subset \mathbb{R}^m$ der Graph von f. Zeigen Sie, daß F eine quasireguläre Hyperfläche ist. Bestimmen sie weiter Tangential- und Normalenvektoren an F und den Flächeninhalt von F. Ist F orientierbar?

Aufgabe 2: **4 Punkte**

In einem Wasser mit konstanter Strömungsgeschwindigkeit $v(x, y, z) = (2, 0, 0)$ sei ein Netz aufgehängt, dessen Form durch die folgende Abbildung gegeben ist:

$$[0, 3] \times [0, 2\pi] \ni (u, v) \mapsto (u - \tanh u, \frac{\cos v}{\cosh u}, \frac{\sin v}{\cosh u}) \in \mathbb{R}^3.$$

Berechnen Sie den Gesamtfluß pro Zeiteinheit des Wassers durch das Netz.

Aufgabe 3: **6 Punkte**

Es seien $m, n \in \mathbb{N}, 1 \leq m \leq n$ und es sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen sowie $p : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Für $u \in U$ definieren wir die Matrix $G(u)$ durch

$$G(u)_{ij} := \left\langle \frac{\partial p}{\partial u_i}(u), \frac{\partial p}{\partial u_j}(u) \right\rangle, \quad i, j = 1, \ldots, m.$$

Zeigen Sie:

(i) $G(u) = p'(u)^t \, p'(u)$ für alle $u \in U$.

(ii) p ist genau dann eine Immersion (d.h. $p'(u)$ ist injektiv für alle $u \in U$), wenn $\det(G(u)) \neq 0$ für alle $u \in U$.

(iii) Ist $m = n$, so ist $|\det p'| = \sqrt{\det G}$.

(iv) Ist $m = n - 1 = 2$ und p eine reguläre Parametrisierung, so ist $\sqrt{\det G} = |N(p)|$.

(v) Ist $m = n - 1 = 1$, so ist $\sqrt{\det G} = |p'|$.

Bemerkung: $\det G$ wird als Gramsche Determinante bezeichnet.

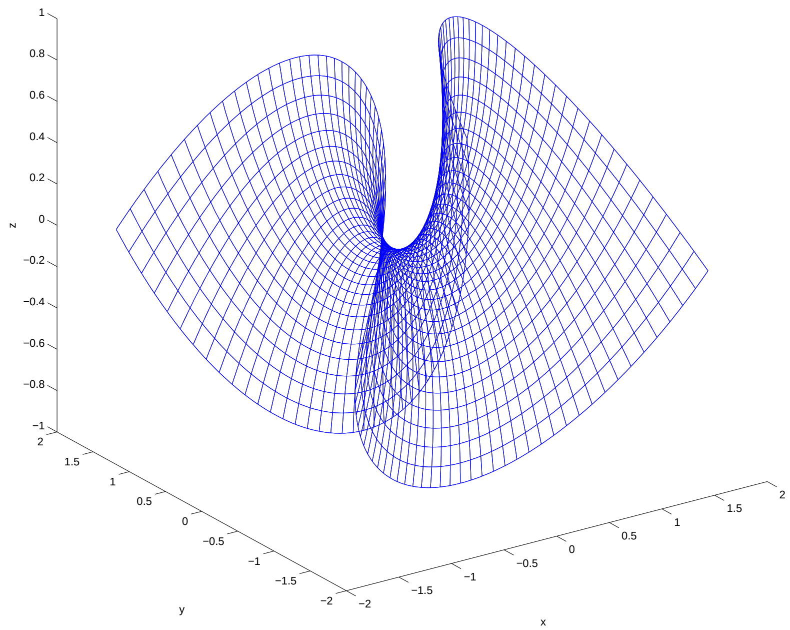
Aufgabe 4: **5 Punkte**

(i) Sei $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 1 - x^2 - y^2,\, z \geq 0\}$.
Parametrisiere S und integriere die Funktion

$$f : S \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = z\sqrt{1/4 + x^2 + y^2},$$

über S.

(ii) Sei $p : [-1, 1]^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto p(u, v) := (u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2)$ (Enneperfläche). Bestimmen Sie das entsprechende Einheitsnormalenfeld und berechnen Sie den Flächeninhalt von $p([-1, 1]^2)$.



Enneperfläche