Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2009/10

Analysis II

14.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 10. / 11. Februar
Dies ist das letzte Übungsblatt der zweiten Semesterhälfte. Aus den Übungblättern 8-14 müssen insgesamt mindestens 67 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1: **5 Punkte**
Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes $v(x,y,z) = (xz, yz, -z)$ durch die Oberfläche des geraden Kreiskegels $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}$ direkt und mit dem Satz von Gauß.

Aufgabe 2: **4 Punkte**
Es seien mit $r, h > 0$:

$$Z_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 = r,\ 0 \leq z \leq h\}$$
$$Z_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leq r,\ z = 0\}$$
$$Z_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2 \leq r,\ z = h\}$$

und $Z := Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3$. Berechnen Sie den Fluß $\int_Z v \cdot n do$ des Vektorfeldes

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v(x,y,z) = (3xy^2 + \ln(1+y^2+z^2), 3x^3z^3 - y^3, 3z - e^{xy}),$$

durch Z. Hierbei sei die Orientierung der einzelnen Flächenstücke durch Sie frei gewählt.

Aufgabe 3: **6 Punkte**
Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen, $p = (p_1, p_2, p_3) \in U$ und K_ϵ der Würfel mit Mittelpunkt p und Seitenlänge ϵ. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $v : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie:

(i) $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^3} \int_{\partial K_\epsilon} v \cdot n do = \mathrm{div} v(p)$.

(ii) $\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon^3} \int_{\partial K_\epsilon} f n do = \mathrm{grad} f(p)$.

In (ii) ist das Integral komponentenweise zu verstehen.
Hinweis: Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Aufgabe 4: **5 Punkte**
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : U \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Sei weiterhin $G \subset U$ ein zulässiges Gebiet. Beweisen Sie mit Hilfe des Gaußschen Satzes die Greenschen Formeln

$$\int_G f\,\Delta g dx + \int_G \mathrm{grad} f \cdot \mathrm{grad} g\, dx = \int_{\partial G} f\, \mathrm{grad} g \cdot n\, do$$
$$\int_G (f\,\Delta g - g\,\Delta f)\, dx = \int_{\partial G} (f\, \mathrm{grad} g - g\, \mathrm{grad} f) \cdot n\, do.$$

Informationen zur Klausur:

Die Klausur findet am **Dienstag, den 16.02.2010** von **10-12 Uhr** im **MA001** statt, die Klausureinsicht am Mittwoch, 17. 2. von 10-12 Uhr. Dort können (im Erfolgsfall) auch die Scheine abgeholt werden.
Dieses Übungsblatt wird rechtzeitig vor der Klausur korrigiert werden. Solltet Ihr noch Punkte aus diesem Blatt zur Klausurzulassung benötigen, nehmt bitte mit Eurem Tutor oder mir Kontakt auf (z.B. per Email), um zu erfahren, ob Ihr es geschafft habt.