Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2009/10

Analysis II

2.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 4. / 5. November

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Berechnen Sie folgende Integrale.

(i) $\int_1^e x^2 \ln(x^2) dx$,

(ii) $\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+4x^2} dx$,

(iii) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx$,

(iv) $\int_0^{2\pi} |\sin(x)| dx$,

(v) $\int_0^x \frac{1}{1+e^t} dt$. Hinweis: Substituiere z.B. $s = 1 + e^{-t}$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Alternativ zur Definition als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion kann man den natürlichen Logarithmus auch durch

$$L : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

definieren. Zeigen Sie

(i) die Funktionalgleichung $L(xy) = L(x) + L(y)$ für alle $x, y \in (0, \infty)$,

(ii) $L(e^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Anmerkung: Die bekannten Eigenschaften des Logarithmus dürfen hier natürlich nicht verwendet werden...

Aufgabe 3: **5 Punkte**

(i) Es seien $f, p : [a, b] \to \mathbb{R}$ Regelfunktionen und f sogar stetig, $p(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$[1]. Zeige, daß es ein $\xi \in [a, b]$ gibt mit

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = f(\xi) \int_a^b p(x)dx.$$

(ii) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage.
Es sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos(x))dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin(x))dx$$

[1] Eine solche Funktion p heißt oftmals *Gewichtsfunktion*

Aufgabe 4: **6 Punkte**

(i) Es sei $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ stetig differenzierbar und streng monoton wachsend. Weiterhin gelte $g(0) = 0$ und $g(x) \to \infty$, falls $x \to \infty$. Insbesondere ist also g bijektiv, die Umkehrfunktion sei wie üblich mit g^{-1} bezeichnet. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $a > 0$ gilt

$$\int_0^a g(t)dt + \int_0^{g(a)} g^{-1}(t)dt = a \cdot g(a).$$

Hinweis: Stellen Sie mittels partieller Integration das Integral $\int_0^a g(t)dt$ anders dar und verwenden Sie $g^{-1}(g(t)) = t$.

(b) Für jedes $x, y \geq 0$ gilt

$$\int_0^x g(t)dt + \int_0^y g^{-1}(t)dt \geq x \cdot y.$$

Hinweis: Führen Sie eine Fallunterscheidung für $g(x) < y$, $g(x) = y$ und $g(x) > y$ durch und verwenden Sie den Zwischenwertsatz.

(ii) Beweisen Sie die Youngsche Ungleichung:
Es seien $a, b \geq 0$ und $p, q \in (1, \infty)$ mit $1/p + 1/q = 1$.[2] Dann gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Hinweis: $g(t) = t^{p-1}$.

(iii) Beweisen Sie die Höldersche Ungleichung:
Es seien $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und p, q wie in (ii). Wir setzen

$$\|u\|_p := \Big(\int_a^b |u(x)|^p dx\Big)^{1/p} \quad \text{und} \quad \|v\|_q := \Big(\int_a^b |v(x)|^q dx\Big)^{1/q}.$$

Dann gilt

$$\Big|\int_a^b u(x)v(x)dx\Big| \leq \|u\|_p \, \|v\|_q.$$

Bemerkung: $\| \cdot \|_p$ erfüllt im allgemeinen bis auf die Definitheit alle Eigenschaften einer Norm und wird L^p-Norm genannt. Auf $C([a, b])$ ist sie aber sogar definit und definiert somit tatsächlich eine Norm. Auf den Regelfunktion allerdings nicht. Diese Eigenschaft wurde übrigens bereits auf dem letzten Aufgabenblatt bewiesen!

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst α,$\beta \geq 0$, sodaß die durch $u = \alpha\hat{u}$, $v = \beta\hat{v}$ definierten Funktion $\hat{u}$ und $\hat{v}$ die Eigenschaft $\|\hat{u}\|_p = 1$ und $\|\hat{v}\|_q = 1$ haben. Beweisen Sie dann die Behauptung zunächst für $\hat{u}$ und $\hat{v}$.

[2] Solche Paare p, q nennt man oft *zueinander konjugierte Exponenten.*