Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2009/10

Analysis II

3.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 11. / 12. November

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Bestimmen Sie die folgenden (unbestimmten bzw. uneigentlichen) Integrale, falls sie existieren.

(i) $\int \frac{x^5+2x^3+x+1}{x^4+x^2} dx$,

(ii) $\int \frac{x^3}{x^3-x^2-x+1} dx$,

(iii) $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} dx$,

(iv) $\int_{-\infty}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

(i) (a) Entscheiden Sie (natürlich mit Begründung), ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^2}$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie, daß das uneigentliche Integral $\int_1^{\infty} \frac{\sin(\pi t)}{t^2} dt$ existiert und anschließend, daß das uneigentliche Integral $\int_0^1 \sin(\pi/x) dx$ existiert.

(ii) Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage.
Sind $f, g : (a, b]$ zwei Regelfunktionen, so daß die uneigentlichen Integrale $\int_a^b f(x)dx$ und $\int_a^b g(x)dx$ existieren, so existiert auch das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)g(x)dx$.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Es sei $1 \leq p < \infty$.

(i) Es seien $f, g \in C([a, b])$. Beweisen Sie die Minkowski-Ungleichung:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Hinweis: Auf Integrale der Form $\int |f||f+g|^{p-1}$ kann die Hölder-Ungleichung angewendet werden.

(ii) Zeigen Sie, daß $(C([a, b]), \|\cdot\|_p)$ tatsächlich ein normierter Raum ist, im allgemeinen allerdings kein Banach-Raum.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

(i) Beweisen Sie mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und der Intergalrechnung sowie des Satzes von Arzela-Osgood den folgenden wichtigen Satz:
Es sei (f_n) eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, so daß die Folge $(\|f_n'\|_\infty)$ beschränkt ist, (f_n') punktweise auf $[a, b]$ gegen eine stetige Funktion konvergiert und es ein $x_0 \in [a, b]$ gibt, so daß $(f_n(x_0))$ konvergiert. Dann konvergiert (f_n) punktweise gegen eine stetig differenzierbare Grenzfunktion f und es gilt für alle $x \in (a, b)$:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

(ii) Es sei $D \subset \mathbb{R}$ offen und $f : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}$ beschränkt. Für alle $x \in [a, b]$ sei $f(x, \cdot) : D \to \mathbb{R}$ stetig und für alle $t \in D$ sein $f(\cdot, t) : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Weiterhin sei $g : D \to [a, b]$ stetig. Zeigen Sie, daß dann auch die Funktion $G : D \to \mathbb{R}$,

$$G(t) := \int_a^{g(t)} f(x, t)dx$$

stetig ist.