Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2009/10

Analysis II

4.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 18. / 19. November

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Es sei $X = \mathbb{Z}$ und

$$\mathcal{O} := \{A \subset \mathbb{Z} \,|\, \text{ Zu jedem } a \in A \text{ gibt es } b \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \text{ so daß } a + b\mathbb{Z} \subset A \text{ gilt.}\}$$

Zeigen Sie, daß $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X ist.
Hinweis: $a + b\mathbb{Z} = \{a + bz \,|\, z \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge und $\mathcal{B} \subset P(X)$ ein System von Teilmengen von X. Zeigen Sie:

(i) Der Schnitt $\mathcal{O}_\mathcal{B}$ aller Topologien auf X, die $\mathcal{B}$ enthalten, ist wieder eine Topologie auf X.

(ii) $\mathcal{O}_\mathcal{B}$ ist die kleinste Topologie, die $\mathcal{B}$ enthält, das heißt, für jede Topologie $\mathcal{O}$ auf X mit $\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$ gilt $\mathcal{O}_\mathcal{B} \subset \mathcal{O}$.

(iii) Bestimmen Sie $\mathcal{O}_\mathcal{B}$ für $X = \mathbb{R}$ und $\mathcal{B} = \{(a, b], (c, d)\}$, $a < b < c < d$.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Funktionalmatrix. Hierbei seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b, c, d \in \mathbb{R}^n$.

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1^2 + x_2, x_1x_2, e^{x_2})$,

(ii) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto A(x + b) + \langle c, x\rangle d$,

(iii) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x, Bx\rangle + \langle b - Ax, b\rangle$,

(iv) $f : \mathbb{R}^n\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\langle x,Ax\rangle}{\langle x,x\rangle}$.

Hinweis: $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichnet das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 4: **6 Punkte**

(i) Es sei $B(0,1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| < 1\}$ und $f : B(0,1) \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$(x,y) \mapsto f(x,y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

(a) Zeige, daß f differenzierbar ist und berechne $f'(x,y)$ für alle $(x,y) \in B(0,1)$.

(b) Es sei $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$ eine Richtung. Zeige, daß für alle $(x,y) \in B(0,1)$ gilt:

$$\Big\langle f(x,y), \Big(\frac{\partial f_1}{\partial v}(x,y), \frac{\partial f_2}{\partial v}(x,y), \frac{\partial f_3}{\partial v}(x,y)\Big)\Big\rangle = 0.$$

(c) Skizziere und interpretiere das Ergebnis aus (b).

(ii) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(x,y) \mapsto f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } y - 1 = (x-1)^2 > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß alle Richtungsableitungen von f im Punkt $(1,1)$ existieren, daß aber f in diesem Punkt nicht einmal stetig ist.

Aufgabe 5: **5 Zusatzpunkte**

Es seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume. Eine Funktion $f : V \to W$ heißt im Punkt $x_0 \in V$ differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung $A : V \to W$ gibt, und eine stetige Funktion $r : V \to W$ mit $r(x_0) = 0$ und

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + r(x)\|x - x_0\|_V, \quad x \in V.$$

Wir nennen A die Ableitung von f in x_0 und schreiben $f'(x_0) := A$. f heißt differenzierbar, falls f differenzierbar in jedem Punkt aus V ist.

(i) Es sei $V = R^{n \times n}$ der Raum der nxn-Matrizen, versehen mit einer beliebigen Matrixnorm. Es sei weiterhin $f : V \to V$ gegeben durch

$$M \mapsto f(M) := M^2 = M \cdot M.$$

Zeigen Sie, daß f differenzierbar ist und bestimmen Sie $f'(M)$, $M \in V$.

(ii) Es sei $V = C([0,1])$ und $W = \mathbb{R}$ und $I : V \to W$ gegeben durch

$$I(u) := \int_0^1 u(x)dx, \quad u \in V.$$

Zeigen Sie, daß I differenzierbar ist und berechnen sie $I'(u)$, $u \in V$.

Hinweis: Diese Aufgabe ist nicht schwer, wenn man verstanden hat, was man tun muss. Dies herauszufinden ist die eigentliche Aufgabe. Aber wenn man dies geschafft hat, wird man neue, tiefere Einblicke in die Natur der Ableitung gewinnen!