Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2009/10

Analysis II

5.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 25. / 26. November

Aufgabe 1: **5 Punkte**

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ für $(x,y) \neq (0,0)$ und $f(0,0) := 0$. Zeige, daß f stetig und partiell differenzierbar ist, daß die partiellen Ableitungen in $(0,0)$ nicht stetig sind, aber daß f in $(0,0)$ trotzdem differerenzierbar ist. Berechne $f'(0,0)$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

(i) Bestimmen Sie alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für die $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$ gilt.

(ii) Welche Lösungen hat die sogenannte Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0?$$

Hinweis: Wenden Sie (i) auf $f \circ \lambda$ an mit $\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\lambda(u,v) = (u+v, u-v)$.

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
Warum steht dies nicht im Widerspruch zum Satz von Schwarz?

Aufgabe 4: **5 Punkte**

(Kugelkoordinaten)
Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$g(r,\phi,\theta) = r \begin{pmatrix} \cos\phi \sin\theta \\ \sin\phi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(i) Skizzieren Sie die Bildmengen der Ebenen $r =$const., $\phi =$const. und $\theta =$const.

(ii) Berechnen Sie die Funktionalmatrix von g. Ist g differenzierbar?

(iii) Sei $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) := \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(xy, x, z)$. Bestimmen Sie die Funktionalmatrizen von f und $f \circ g|_{\{(r,\phi,\theta)\in\mathbb{R}^3 \,|\, r\neq 0\}}$. Sind f und $f \circ g|_{\{(r,\phi,\theta)\in\mathbb{R}^3 \,|\, r\neq 0\}}$ differenzierbar?