Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2009/10

Analysis II

6.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 2. / 3. Dezember

Aufgabe 1: **4 Punkte**

(i) Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \sin(xze^{yz})$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades um den Punkt $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 0)$.

(ii) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = \cos(x) \cos(y)$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom ersten Grades um den Punkt $(x_0, y_0) = (\pi/4, \pi/4)$ und geben Sie das Restglied an.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Gegeben seien Datenpunkte $(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$ für $1 \leq j \leq n$. Die *Regressionsgerade* für diese Daten ist diejenige Gerade $y = \lambda x + c$ im $\mathbb{R}^2$, welche die Summe der Quadrate der vertikalen Abstände zwischen der Gerade und den gegebenen Datenpunkten minimiert. Es soll also (λ, c) so gewählt werden, daß $\sum_{j=1}^{n}(\lambda x_j + c - y_j)^2$ minimiert wird. Zeigen Sie, daß dies genau dann der Fall ist, wenn

$$\lambda = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}, \quad c = \overline{y} - \lambda \overline{x}.$$

Hierbei bezeichnen wir mit $\overline{v}$ den Durchschnitt aller Werte $v_1, \ldots, v_n$, also

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \text{ u.s.w.}$$

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Zeigen Sie, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$$

im Nullpunkt einen kritischen Punkt, aber kein lokales Minimum besitzt. Zeigen Sie weiter, daß trotzdem die Einschränkung von f auf eine beliebige Gerade durch den Nullpunkt dort ein Minimum hat.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Es sei weiter $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf D differenzierbar ist. Beweisen Sie:

(i) Ist $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so nimmt f ihr Minimum und Maximum auf ∂D an.

(ii) Ist $f'(x) = 0$ für genau ein $x \in D$, so nimmt f ihr Minimum oder ihr Maximum auf ∂D an.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Es sei $c > 0$ und $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x,y,z \geq 0, x+y+z \leq 4c\}$. Sei $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xyz(4c - x - y - z)$. Bestimmen Sie den größten Wert von f.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $f(x,y,z)$ für $(x,y,z) \in \partial D$ und folgern Sie, daß f ihr Maximum im Innern von D annimmt.