Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2009/10

Analysis II

7.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 9. / 10. Dezember
Dies ist das letzte Übungsblatt der ersten Semesterhälfte. Aus den Übungblättern 0-7 müssen insgesamt mindestens 75 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y + z,\ xy + yz + xz,\ xyz)$. Zeigen Sie, daß f in (x_0, y_0, z_0) genau dann lokal invertierbar ist, wenn $(x_0 - y_0)(y_0 - z_0)(z_0 - x_0) \neq 0$ gilt. Bestimmen Sie die Funktionalmatrix der Umkehrabbildung an der Stelle $f(0, 1, 2)$.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

(i) Betrachten Sie die Gleichung $z^3 + z + xy = 1$ Diese hat für jedes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ genau eine reelle Lösung $z = \phi(x, y)$. Zeigen Sie, daß $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist und berechnen Sie $\phi'(1, 1)$.

(ii) Zeigen Sie, daß für x in einer Umgebung von 2 die Gleichung $y^3 + x^2 = -1$ durch eine stetig differenzierbare Funktion $y(x)$ nach y aufgelöst werden kann und berechnen Sie $y'(2)$.

Aufgabe 3: **3 Punkte**

Bestimme die Extrema der Funkion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2$ unter der Bedingung $4x^2 + y^2 = 25$. Skizziere die durch die Bedingung definierte Teilmenge von $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

In der Vorlesung wurde der Satz über implizite Funktionen aus dem Umkehrsatz gefolgert. Beweise nun die umgekehrte Implikation, zeige also, daß der Umkehrsatz aus dem Satz über implizite Funktionen folgt.

Aufgabe 5: **5 Punkte**

(i) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $H : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei weiterhin

$$M = \mathcal{N}_0 := \{x \in U \mid H(x) = 0\}$$

die Niveaumenge von H zum Wert 0. Schließlich sei $x_0 \in M$ mit $(\nabla H)(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie folgende Behauptung.
Ist $y \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor mit $\langle (\nabla H)(x_0),\, y \rangle = 0$, so gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine stetig differenzierbare Kurve $c : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ mit $c(0) = x_0$ und $c'(0) = y$.
Illustrieren Sie diese Aussage mit einer aussagekräftigen Skizze.
Hinweis: Da $(\nabla H)(x_0) \neq 0$, so können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß $(\partial H/\partial x_n)(x_0) \neq 0$ ist. Wenden Sie nun den Satz über implizite Funktionen geeignet an.

(ii) Es sei nun $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f, H : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und es sei

$$x_0 \in M = \{x \in U \mid H(x) = 0\}$$

mit $(\nabla H)(x_0) \neq 0$. Zeigen Sie: Nimmt f in x_0 ein lokales Extremum auf der Menge M an, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so daß

$$(\nabla f)(x_0) = \lambda (\nabla H)(x_0).$$