TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2009/10

Analysis II

8.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 16. / 17. Dezember
Dies ist das erste Übungsblatt der zweiten Semesterhälfte.

Aufgabe 1: **6 Punkte**

(i) Skizzieren Sie die Kurve

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 - (y - \lambda) = 0,\ -2 \leq x \leq 1\},$$

wobei $a > 0$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Geben Sie eine möglichst einfache Parametrisierung an.

(ii) Es sei $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) := e^{-t}(\cos(t), \sin(t))$. Skizzieren Sie die durch γ parametrisierte Kurve im Bereich $-2\pi \leq t \leq 2\pi$. Für $[a, b] \subset \mathbb{R}$ sei $L_{[a,b]}$ die Länge der Kurve $\gamma|_{[a,b]}$. Berechnen Sie $L_{[a,b]}$. Existiert $\lim_{b\to\infty} L_{[0,b]}$?

(iii) Ein Kreis vom Radius 1 rolle auf der $x-$Achse. Betrachte die Spur, die ein Punkt auf diesem Kreis beschreibt. Diese Kurve heißt Zykloide. Berechnen Sie ihre regulären Punkte und ihre Bogenlänge auf einem maximalen regulären Stück.

(iv) Integrieren sie das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v(x, y) = (-y, x)$ entlang der durch

$$\phi : [a, b] \to \mathbb{R}^2, \quad \phi(t) := e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

parametrisierten Kurve.

Aufgabe 2: **5 Punkte**

(i) Es sei $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ regulär und es sei $t_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$|c(t_0)| = \min_{t\in\mathbb{R}} |c(t)|.$$

Zeigen Sie, daß dann $c'(t_0)$ senkrecht steht auf $c(t_0)$.

(ii) Es sei $\gamma : [c, d] \to \mathbb{R}^d$ eine regulär und stetig differenzierbar. Zeigen Sie, daß es eine Parametertransformation $\phi : [a, b] \to [c, d]$ gibt, so daß die Kurve $\alpha = \gamma \circ \phi$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist, das heißt, für alle $t \in [a, b]$ gilt $|\alpha'(t)| = 1$.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Zeigen Sie, daß $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$f(t) := \begin{cases} (t, t\cos(\pi/t)), & \text{falls } 0 < t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine stetige Kurve ist, die nicht rektifizierbar ist.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Eine Teilmenge $C \subset \mathbb{R}^d$ heißt *(stetig differenzierbare) 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von* $\mathbb{R}^d$, falls es für alle $p \in C$ eine offene Umgebung $U_p \subset \mathbb{R}^d$ von p gibt, eine offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und eine stetig differenzierbare, bijektive Funktion $\gamma : I \to U_p \cap C$, so daß $\gamma'(t)$ injektiv ist für alle $t \in I$. Die Abbildung γ ist dann eine (lokale) Parametrisierung von C.

Zeigen Sie, daß C genau dann eine 1-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^d$ ist, falls es zu jedem Punkt $p \in C$ eine offene Umgebung $U_p \subset \mathbb{R}^d$ von p und eine stetig differenzierbare Abbildung $g : U_p \to \mathbb{R}^{d-1}$ gibt, so daß $C \cap U_p = g^{-1}(\{0\})$ gilt und $g'(q)$ surjektiv ist für alle $q \in C \cap U_p$.