Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2009/10

Analysis II

9.Übungsblatt

Abgabe vor den Tutorien am 6. / 7. Januar

Aufgabe 1: **4 Punkte**

Es seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, daß

$$\Delta(fg) = g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g\rangle + f\Delta g$$

gilt, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das euklidische Skalarprodukt bezeichne.
Weiterhin sei für $\omega \in \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x) := \omega \times x$ gegeben. Berechnen Sie $\mathrm{rot}(v)$.

Aufgabe 2: **6 Punkte**

(i) Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (\lambda xz\cos(x^2) + y, x, \sin(x^2) - 2z)$$

ein Potential? Bestimmen Sie für diese λ ein solches.

(ii) Integrieren Sie das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v(x, y, z) := (2x + ye^{z^2}, 2y + xe^{z^2}, 2xyze^{z^2})$ über der durch

$$c : [0, 1] \to \mathbb{R}^3, \quad c(t) := \begin{cases} (0, 0, 0) & \text{falls } t = 0, \\ (e^{1-1/t}\cos(\pi/t),\ e^{1-1/t}\sin(\pi/t), \sin(\pi t)\cos(\pi t)) & \text{falls } t \neq 0. \end{cases}$$

Aufgabe 3: **5 Punkte**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig glatte Funktion und sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$F(x) := f(|x|)x.$$

(i) Zeigen Sie, daß F ein Potential besitzt.

(ii) Bestimmen Sie f so, daß $\mathrm{div}F(x) = 5|x|^2 + 3$ gilt und $\lim_{r\to 0} f(r)$ existiert.
Hinweis: Die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $y'(x) + a(x)y(x) = b(x)$ ist gegeben durch

$$y(x) = \exp\big(-\int_{x_0}^x a(t)dt\big)\Big(\int_{x_0}^x \exp\big(\int_{x_0}^t a(s)ds\big)b(t)dt + C\Big).$$

Hierbei ist $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig, z.B. $x_0 = 1$. Die Konstante $C \in \mathbb{R}$ muss geeignet bestimmt werden.

(iii) Bestimmen Sie eine Lösung der Differentialgleichung $\Delta\phi(x) = 5|x|^2 + 3$.

Aufgabe 4: **5 Punkte**

Es sei $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ ein konservatives Vektorfeld, das also ein Potential $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ besitzt. Es sei weiterhin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ eine zweimal stetig differenzierbare Kurve, die dem Newtonschen Bewegungsgesetz genügt, es gilt also $\gamma'' = v(\gamma)$. Zeigen Sie den Energieerhaltungssatz

$$\frac{1}{2}\big(|\gamma'(b)|^2 - |\gamma'(a)|^2\big) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Frohe Weihnachten und einen guten Start ins neue Jahr!