Klausur - Analysis II
Lösungsskizzen

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Kennzeichnen Sie wahre Aussagen mit **W** und falsche Aussagen mit **F**. Es sind keine Begründungen nötig. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche wird ein halber Punkt abgezogen, nicht beantwortete Teilaufgaben werden nicht bewertet. Die minimale Gesamtpunktzahl ist Null.

- $\boxed{\text{F}}$ Es sei (f_n) eine Folge stetiger Funktionen auf $[a,b]$, die punktweise gegen eine stetige Funktion f konvergiert. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.
- $\boxed{\text{W}}$ Es sei $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Existieren die partiellen Ableitungen von f und sind diese stetig, so ist f differenzierbar.
- $\boxed{\text{F}}$ Die Hesse-Matrix einer zweimal differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist symmetrisch.
- $\boxed{\text{F}}$ Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to V$ stetig differenzierbar und $f'(x)$ invertierbar für jedes $x \in U$. Dann ist f injektiv.
- $\boxed{\text{F}}$ Es sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge. Dann ist der Abschluß $\overline{N}$ ebenfalls eine Nullmenge.
- $\boxed{\text{W}}$ Ist $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : \overline{A} \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert $\int_A f(x)dx$.

---

ad (i) Gegenbeispiel z.B. („Hüte“ mit Höhe n und Breite $2/n$)

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) := \begin{cases} n^2 x, & \text{falls } 0 \le x \le 1/n \\ 2n - n^2 x, & \text{falls } 1/n \le x \le 2/n \\ 0, & \text{sonst .} \end{cases}$$

Dann konvergiert die Folge (f_n) stetiger Funktion punktweise gegen die (stetige) Nullfunktion, es ist aber $\int_0^1 f_n(x)dx = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Für den Satz von Arzela-Osgood müsste die Folge beschränkt sein)

ad (ii) Dies ist ein Satz aus der Vorlesung.

ad (iii) Dies ist i.a. nur richtig, falls f zweimal **stetig** differenzierbar ist (Satz von Schwarz).

ad (iv) Gegenbeispiel z.B. „Polarkoordinaten“ $f : (0,\infty)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, $f(r,\phi) = r(\cos\phi, \sin\phi)$. Dann ist f nicht injektiv, aber $\det(f'(r,\phi)) = r > 0$, also $f'(r,\phi)$ invertierbar.

ad (v) Gegenbeispiel z.B. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

ad (vi) Satz aus der Vorlesung.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Es sei $B = \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, |x| < 1\}$ und $f : B \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Weiterhin gebe es Konstanten $L_1, \ldots, L_n$ mit

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\Big| \leq L_i \quad \text{für alle } x \in B \text{ und } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Es seien nun $x \in B$ und $h \in \mathbb{R}^n$ so, daß $x + h \in B$ ist. Beweisen Sie die Abschätzung

$$|f(x+h) - f(x)| \leq \sum_{i=1}^{n} L_i |h_i|.$$

Mit der stetig differenzierbaren Hilfsfunktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $g(t) = f(x+th)$ folgt $g'(t) = f'(x+th) \cdot h = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+th) \cdot h_i$, also gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in [0,1]$ mit

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| = |g(1) - g(0)| = |g'(\xi)| &= |\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\xi h) \cdot h_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+\xi h)||h_i| \leq \sum_{i=1}^{n} L_i |h_i|. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2y^2 + 3z^3 &= 0 \\ e^x + e^{2y} + e^{3z} &= 3. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie eine Lösung (x_0, y_0, z_0) des Gleichungssystems. Zeigen Sie, daß sich das System nahe (x_0, y_0, z_0) nach x, y als Funktionen von z auflösen läßt.

(b) Es seien $z \mapsto x(z)$ und $z \mapsto y(z)$ die Lösungsfunktionen aus (a). Bestimmen Sie $x'(z_0)$ und $y'(z_0)$.

(a) Offenbar ist $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ eine Lösung des Gleichungssystems. Wir setzen

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(z, x, y) = \begin{pmatrix} x + 2y^2 + 3z^3 \\ e^x + e^{2y} + e^{3z} - 3 \end{pmatrix}.$$

Dann ist f stetig differenzierbar, $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ und

$$\frac{\partial f}{\partial(x, y)}(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

invertierbar. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es somit Umgebungen $U \subset \mathbb{R}$ von $z_0 = 0$ und $V \subset \mathbb{R}^2$ von $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V$ mit $f(z, g(z)) = 0$ für alle $z \in U$.

(b) Es sei $z \mapsto g(z) = (x(z), y(z))$ die Lösungsfunktion aus (a). Dann ist

$$\begin{aligned} g'(z_0) = g'(0) &= -\Big(\frac{\partial f}{\partial(x, y)}(x_0, y_0, z_0)\Big)^{-1} \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ &= -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also $x'(0) = 0$ und $y'(0) = -3/2$.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Integrieren Sie das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v(x,y,z) = \left(\frac{2xz}{1+x^2} + y,\, x,\, \ln(1+x^2) - 2z\right)$$

entlangt der durch

$$c : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (\sin(\pi t),\, 5t^2 + t - 2,\, 2te^{t^2-t})$$

parametrisierten Kurve und bestimmen Sie ein Potential von v.

Wir bestimmen ein Potential f von v, z.B. $f(x,y,z) = z\ln(1+x^2) - z^2 + xy$. Da also das Integral $\int_c v ds$ nur vom Anfangspunkt $AP = c(0) = (0,-2,0)$ und Endpunkt $EP = c(1) = (0,4,2)$ abhängt folgt

$$\int_c v ds = f(EP) - f(AP) = -4 - 0 = -4.$$

Aufgabe 5: **5 Punkte**

Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen, nichtleer und beschränkt. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \int_A \|x - y\|^2 dy.$$

Zeigen Sie:

(a) f ist zweimal stetig differenzierbar.

(b) Der Schwerpunkt $\overline{y}$ von A ist die eindeutige Minimalstelle der Funktion f auf $\mathbb{R}^n$.

Zur Erinnerung: Der Schwerpunkt $\overline{y} = (\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)$ ist gegeben durch

$$\overline{y}_i := \frac{1}{V(A)} \int_A y_i dy.$$

(a) Es ist

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^n \int_A (x_i - y_i)^2 dy = \sum_{i=1}^n \Big(x_i^2 \int_A 1 dy \; - \; 2x_i \int_A y_i dy \; + \; \int_A y_i^2 dy \Big) \\ &= \sum_{i=1}^n \Big(x_i^2 V(A) \; - \; 2x_i \int_A y_i dy \; + \; \int_A y_i^2 dy \Big) \end{aligned}$$

Also ist f ein Polynom (in x) und damit zweimal stetig differenzierbar.

(b) Es folgt sofort für $i = 1, \ldots, n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 2x_i V(A) - 2 \int_A y_i dy = 2V(A)(x_i - \overline{y}_i)$$

und damit

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 2V(A) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 2V(A). \end{pmatrix}$$

Also ist $\nabla f(x) = 0$ genau dann, wenn $x_i = \overline{y_i}$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Da $V(A) > 0$, ist weiterhin $Hf(x)$ positiv definit für alle $x \in \mathbb{R}^n$, insbesondere also für $x = \overline{y}$. Somit nimmt also f genau in $\overline{y}$ ihr Minimum an.

Aufgabe 6: **4 Punkte**

Berechnen Sie den Fluß $\int_{\partial E} \langle v, n \rangle do$ des Vektorfeldes $v(x,y,z) = \big(2x + e^{yz},\ z\cos(x),\ y\sin(x)\big)$ durch den Rand des Ellipsoids

$$E := \Big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\Big|\, \Big(\frac{x}{2}\Big)^2 + \Big(\frac{y}{3}\Big)^2 + \Big(\frac{z}{4}\Big)^2 \leq 1 \Big\}.$$

Es ist $\operatorname{div} v(x,y,z) = 2 + 0 + 0 = 2$, also nach dem Satz von Gauß

$$\int_{\partial E} v \cdot n do = \int_E \operatorname{div} v(x,y,z) d(z,y,z) = 2V(E).$$

Mit der Koordinatentransformation $g : [0,1] \times [0, 2\pi] \times [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$,

$$g(r, \phi, \theta) = (2r\cos(\phi)\cos(\theta),\ 3r\sin(\phi)\sin(\theta), 4\sin(\theta)$$

folgt $|\det g'(r,\phi,\theta)| = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot r^2 \cos(\theta)$, also

$$V(E) = 24 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos(\theta) = 24 \cdot 4\pi/3 = 32\pi,$$

also

$$\int_{\partial E} v \cdot n do = 64\pi.$$