Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Dr. J. Behrndt, C. Kreusler

Wintersemester 2009/2010

Nachklausur - Analysis II
Aufgaben

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Kennzeichnen Sie wahre Aussagen mit **W** und falsche Aussagen mit **F**. Es sind keine Begründungen nötig. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche wird ein halber Punkt abgezogen, nicht beantwortete Teilaufgaben werden nicht bewertet. Die minimale Gesamtpunktzahl ist Null.

- ☐ Es sei $f : [a, b] \to [0, \infty)$ eine Regelfunktion mit $\int_a^b f(x)dx = 0$. Dann gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$.
- ☐ Existieren alle partiellen Ableitungen einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$, so ist f stetig in x_0.
- ☐ Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und nimmt in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein lokales Minimum an, so ist die Hessematrix $(Hf)(x_0)$ in diesem Punkt positiv definit.
- ☐ Es habe die stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Nullstelle (x_0, y_0) und es sei $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ invertierbar. Dann besitzt f weitere Nullstellen.
- ☐ Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet, C eine geschlossene Kurve in G und $v : G \to \mathbb{R}^n$ ein rotationsfreies Vektorfeld, so ist $\int_C v ds = 0$.
- ☐ Es sei $Q = [0, 1]^n$ und $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Folge von Treppenfunktionen auf Q, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Es seien $c \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Gegeben sei weiterhin die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = c + \langle a, x\rangle + \langle x, x\rangle.$$

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(b) Zeigen Sie, daß f keine lokalen Maxima hat.

Erinnerung: Mit $\langle\cdot, \cdot\rangle$ bezeichnen wir das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Es sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve. Beweisen Sie, daß $f \circ \gamma$ genau dann auf (a, b) konstant ist, wenn

$$\big\langle (\nabla f)(\gamma(t))\, ,\, \gamma'(t) \big\rangle = 0 \quad \text{für alle } t \in (a, b).$$

Integrieren Sie weiterhin in diesem Fall das Vektorfeld $v = \nabla f$ über γ.

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) := \big(e^x \cos(y),\, e^x \sin(y)\big).$$

Zeigen Sie, daß f nicht global invertierbar ist, jedoch in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ lokal invertierbar ist.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Gegeben sei die Funktion

$$f : [-1,2] \times [1,4] \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} xy, & \text{falls } x^2 \leq y \leq x+2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie

$$\int_{-1}^{2} \int_{1}^{4} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Aufgabe 6: **5 Punkte**

Bestimmen Sie den Fluß $\int_{\partial K} \langle v, n\rangle do$ des Vektorfeldes

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v(x,y,z) = \big(x(1-z) + 3y^2,\, y(z-1) + x,\, z^2\big)$$

durch den Rand des Körpers

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 < z^2,\, 0 < z < 2\}.$$