Nachklausur - Analysis II
Lösungsskizzen

Aufgabe 1: **3 Punkte**

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Kennzeichnen Sie wahre Aussagen mit **W** und falsche Aussagen mit **F**. Es sind keine Begründungen nötig. Für jede richtige Antwort gibt es einen halben Punkt, für jede falsche wird ein halber Punkt abgezogen, nicht beantwortete Teilaufgaben werden nicht bewertet. Die minimale Gesamtpunktzahl ist Null.

$\boxed{\text{F}}$ Es sei $f : [a,b] \to [0,\infty)$ eine Regelfunktion mit $\int_a^b f(x)dx = 0$. Dann gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$.

$\boxed{\text{F}}$ Existieren alle partiellen Ableitungen einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$, so ist f stetig in x_0.

$\boxed{\text{F}}$ Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und nimmt in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ein lokales Minimum an, so ist die Hessematrix $(Hf)(x_0)$ in diesem Punkt positiv definit.

$\boxed{\text{W}}$ Es habe die stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Nullstelle (x_0, y_0) und es sei $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ invertierbar. Dann besitzt f weitere Nullstellen.

$\boxed{\text{W}}$ Ist $G \subset \mathbb{R}^n$ ein sternförmiges Gebiet, C eine geschlossene Kurve in G und $v : G \to \mathbb{R}^n$ ein rotationsfreies Vektorfeld, so ist $\int_C v ds = 0$.

$\boxed{\text{W}}$ Es sei $Q = [0,1]^n$ und $f : Q \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es eine Folge von Treppenfunktionen auf Q, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

---

ad (i) Ist f z.B. die charakt. Funktion der Menge $\{1\}$ auf dem Intervall $[0,2]$, so ist f eine Regelfunktion (sogar eine Treppenfunktion) mit $\int_0^2 f(x)dx = 0$, aber $f(1) = 1 \neq 0$.

ad (ii) Ist f z.B. die charakt. Funktion der Menge $\{xy = 0\} = \{x = 0 \text{ oder } y = 0\}$, so ist f im Ursprung partiell differenzierbar, aber unstetig.

ad (iii) Dies ist schon in $\mathbb{R}$ falsch, wie das Beispiel $f(x) = x^4$ zeigt.

ad (iv) Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es dann sogar ganze Umgebungen U von x_0 und V von y_0 unf eine Funktion $g : U \to V$, so daß $f(x, g(x)) = 0$ für alle $x \in U$!

ad (v) Unter diesen Voraussetzungen ist nach dem Lemma von Poincaré das Vektorfeld v konservativ, also verschwinden insbesondere die Wegintegrale über geschlossene Kurven.

ad (vi) Satz aus der Vorlesung.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Es seien $c \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Gegeben sei weiterhin die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f(x) = c + \langle a, x\rangle + \langle x, x\rangle.$$

(a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

(b) Zeigen Sie, daß f keine lokalen Maxima hat.

Erinnerung: Mit $\langle \cdot, \cdot, \rangle$ bezeichnen wir das euklidische Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$.

Es ist $f(x) = c + \sum_{i=1}^n (a_i x_i + x_i^2)$, also $(\nabla f)(x) = (a_1 + 2x_1, \ldots, a_n + 2x_n) = a + 2x$ und

$$(Hf)(x) = \begin{pmatrix} 2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Kurz: f ist bereits ein Polynom 2. Grades und stimmt somit mit seinem Taylorpolynom 2. Grades überein.
Lang: Es ist

$$\begin{aligned} Tf(x) &= f(x_0) + \langle (\nabla f)(x_0)\, ,\, x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle (Hf)(x_0)(x - x_0)\, ,\, x - x_0\rangle \\ &= c + \langle a, x_0\rangle + \langle x_0, x_0\rangle + \langle a + 2x_0, x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle 2(x - x_0), x - x_0\rangle \\ &= c + \langle a, x_0\rangle + \langle x_0, x_0\rangle + \langle a, x\rangle - \langle a, x_0\rangle + 2\langle x_0, x\rangle \\ &\qquad\qquad - 2\langle x_0, x_0\rangle + \langle x, x\rangle - 2\langle x, x_0\rangle + \langle x_0, x_0\rangle \\ &= c + \langle a, x\rangle + \langle x, x\rangle = f(x). \end{aligned}$$

(b) Hätte f ein lokales Maximum in einem Punkt x_0, so wäre notwendigerweise $(\nabla f)(x_0) = 0$ und da Hf in allen Punkten positiv definit ist, so näme f in x_0 ein Minimum an. Dies kann nicht sein (f ist nirgends konstant).

Aufgabe 3: **4 Punkte**

Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine reguläre Kurve. Beweisen Sie, daß $f \circ \gamma$ genau dann auf (a, b) konstant ist, wenn

$$\big\langle (\nabla f)(\gamma(t))\,,\, \gamma'(t) \big\rangle = 0 \quad \text{für alle } t \in (a, b).$$

Integrieren Sie weiterhin in diesem Fall das Vektorfeld $v = \nabla f$ über γ.

Es ist $f \circ \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ nach dem HDI genau dann konstant, wenn $(f \circ \gamma)'$ verschwindet. Nun ist nach der Kettenregel aber für beliebige $t \in (a, b)$:

$$(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\, \gamma'(t) = \big\langle (\nabla f)(\gamma(t))\,,\, \gamma'(t) \big\rangle = 0.$$

Nach der Definition des Kurvenintegrals folgt unmittelbar

$$\int_\gamma \nabla f ds = \int_a^b \langle (\nabla f)(\gamma(t)),\, \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b 0 dt = 0.$$

Aufgabe 4: **4 Punkte**

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) := \big(e^x \cos(y),\, e^x \sin(y)\big).$$

Zeigen Sie, daß f nicht global invertierbar ist, jedoch in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ lokal invertierbar ist.

Da z.B. $f(0,0) = (1,0) = f(0,2\pi)$ ist, so ist f nicht injektiv und somit auch nicht global invertierbar.

Da

$$\det f'(x,y) = \det \begin{pmatrix} e^x \cos(y) & -e^x \sin(y) \\ e^x \sin(y) & e^x \cos(y) \end{pmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ gilt, so ist f nach dem Unkehrsatz überall lokal invertierbar.

Aufgabe 5: **4 Punkte**

Gegeben sei die Funktion

$$f : [-1,2] \times [1,4] \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \begin{cases} xy, & \text{falls } x^2 \leq y \leq x+2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie

$$\int_{-1}^{2} \int_{1}^{4} f(x,y) dy dx.$$

Es sei

$$M = \{(x,y) \in [-1,2] \times [1,4] \,|\, x^2 \leq y \leq x+2\} = \{(x,y) \in [-1,2] \times [1,4] \,|\, y-2 \leq x \leq \sqrt{y}\}.$$

Dann ist nach dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{2} \int_{1}^{4} f(x,y) dy dx &= \int_{[-1,2]\times[1,4]} f(x,y) d(x,y) = \int_{M} xy d(x,y) + \int_{([-1,2]\times[1,4])\setminus M} 0 d(x,y) \\ & \int_{1}^{4} \int_{y-2}^{\sqrt{y}} xy dx dy \; + \; 0 = \frac{1}{2} \int_{1}^{4} y^2 - y(y-2)^2 dy \\ &= \frac{1}{2} \int_{1}^{4} 5y^2 - y^3 - 4y dy = \frac{1}{2} \Big(\frac{5}{3} y^3 - \frac{1}{4} y^4 - 2y^2 \Big) \Big|_{1}^{4} \\ &= \frac{45}{8}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6: **5 Punkte**

Bestimmen Sie den Fluß $\int_{\partial K} \langle v, n \rangle do$ des Vektorfeldes

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad v(x,y,z) = \big(x(1-z) + 3y^2, y(z-1) + x, z^2\big)$$

durch den Rand des Körpers

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 < z^2,\, 0 < z < 2\}.$$

Es ist $\operatorname{div} f(x,y,z) = 2z$ und da K ein zulässiges Gebiet ist, so folgt nach dem Satz von Gauß:

$$\int_{\partial K} \langle v, n \rangle do = \int_K 2z d(x,y,z).$$

Nun ist K ein Kegel, welchen wir beispielsweise durch

$$p : \Omega = \{(r,\phi,z) | 0 \le \phi \le 2\pi,\, 0 \le z \le 2,\, 0 \le r \le z\} \to K, \quad p(r,\phi,z) = (r\cos(\phi),\, r\sin(\phi),\, z)$$

parametrisieren können. Dann ist $|\det p'(r,\phi,z)| = r$ und somit

$$\begin{aligned}\int_K 2z d(x,y,z) &= 2\int_\Omega zr d(r,\phi,z) = 2\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^z zr dr dz d\phi \\ &= 2\pi \int_0^2 z^3 dz = 8\pi.\end{aligned}$$