

Tutorien am 21. / 22. 10.

Aufgabe 1:

Zeige durch Approximation mit Treppenfunktionen

- (i) $\int_a^b dx = b - a$
- (ii) $\int_a^b x dx = 1/2(b^2 - a^2)$.
- (iii) $\int_0^x t^2 dt = x^3/3, \quad x > 0$

Aufgabe 2:

Beweise Monotonie und Beschränktheit des Integrals für Treppenfunktionen, d.h. seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Treppenfunktionen. Zeige:

- (i) Ist $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, so folgt $I(f) \geq 0$.
- (ii) Es gibt ein $M > 0$, so daß $I(f) \leq M \|f\|_\infty$.
- (iii) Ist $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a, b]$, so folgt $I(f) \geq I(g)$.

Aufgabe 3:

Ist die durch

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion eine Regelfunktion?

Aufgabe 4:

Beweise oder widerlege: Sind $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Treppenfunktionen, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx.$$

Aufgabe 5:

Es sei $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und es gelte $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-a, a]$. Zeige, daß dann $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ gilt.