

## Tutorien am 21. / 22. 10.

### Aufgabe 1:

Zeige durch Approximation mit Treppenfunktionen

- (i)  $\int_a^b dx = b - a$
- (ii)  $\int_a^b x dx = 1/2(b^2 - a^2)$ .
- (iii)  $\int_0^x t^2 dt = x^3/3, \quad x > 0$

### Aufgabe 2:

Beweise Monotonie und Beschränktheit des Integrals für Treppenfunktionen, d.h. seien  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Treppenfunktionen. Zeige:

- (i) Ist  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in [a, b]$ , so folgt  $I(f) \geq 0$ .
- (ii) Es gibt ein  $M > 0$ , so daß  $I(f) \leq M \|f\|_\infty$ .
- (iii) Ist  $f(x) \geq g(x)$  für alle  $x \in [a, b]$ , so folgt  $I(f) \geq I(g)$ .

### Aufgabe 3:

Ist die durch

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Funktion eine Regelfunktion?

### Aufgabe 4:

Beweise oder widerlege: Sind  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei Treppenfunktionen, dann gilt:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx.$$

### Aufgabe 5:

Es sei  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Regelfunktion und es gelte  $f(-x) = -f(x)$  für alle  $x \in [-a, a]$ . Zeige, daß dann  $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$  gilt.