Tutorien am 6. / 7. Januar

Aufgabe 1:
Integriere die folgenden Funktionen.

(i) $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy + y^2$.

(ii) $f : [0,a] \times [0,b] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xe^{xy}$

Aufgabe 2:
Es seien Q_0 und Q_1 disjunkte Quader in $\mathbb{R}^d$ und ϕ eine Treppenfunktion auf $Q_0 \cup Q_1$. Zeige, daß

$$\int_{Q_0 \cup Q_1} \phi(x)dx = \int_{Q_0} \phi(x)dx + \int_{Q_1} \phi(x)dx$$

gilt.

Aufgabe 3:
Es sei $Q \subset \mathbb{R}^d$ ein kompakter Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ integrierbar, d.h. f ist gleichmäßiger Grenzwert einer Folge von Treppenfunktionen. Zeige die folgenden Behauptungen:

(i) $\int_Q \alpha f(x)dx = \alpha \int_Q f(x)dx$ für beliebige $\alpha \in \mathbb{R}$.

(ii) Aus $f(x) \geq 0$ für alle $x \in Q$ folgt $\int_Q f(x)dx \geq 0$.

(iii) Ist f stetig, so folgt aus $\int_Q |f(x)|dx = 0$ auch $f(x) = 0$ für alle $x \in Q$. Im allgemeinen gilt dies jedoch nicht.

Aufgabe 4:
Sei

$$f : ((-\infty,-1] \cup [1,\infty)) \times [1,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) := \frac{y}{x^3}.$$

Untersuche die Existenz der Integrale

$$\int_{(-\infty,-1]\cup[1,\infty))} \int_{[1,\infty)} f(x,y)dydx \quad \text{und} \quad \int_{[1,\infty)} \int_{(-\infty,-1]\cup[1,\infty))} f(x,y)dxdy.$$