Tutorien am 13. / 14. Januar

Aufgabe 1:

(i) Es sei $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\pi < x < \pi,\ \sin(x) - 1 < y < \sin(x) + 1\}$, und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x, y) = xy$. Integriere f über Ω.

(ii) Bestimme das Volumen des von den Flächen $y = z$, $x = 0$, $z = 0$ und $x + 2y = 4$ begrenzten Körpers.

Aufgabe 2:
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Ändere bei den folgenden Integralen die Integrationsreihenfolge:

(i) $\int_0^1 \int_0^x f(x, y)dy\,dx$

(ii) $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy\,dx$

(iii) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)dx\,dy$.

Aufgabe 3:

(i) Es sei $Q \subset \mathbb{R}^d$ ein Quader mit $V(Q) = 0$. Zeige, daß Q eine Nullmenge ist.

(ii) Zeige, daß Teilmengen von Nullmengen wieder Nullmengen sind.

(iii) Zeige, daß im allgemeinen überabzählbare Vereinigungen von Nullmengen keine Nullmengen sind.

(iv) Zeige, daß die Menge

$$N := \{(x, x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

eine Nullmenge ist.

Aufgabe 4:
Es sei $A \subset \mathbb{R}^d$ eine kompakte Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist der Graph von f,

$$\mathrm{gr}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{d+1} \mid x \in A \text{ und } y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{d+1}$$

eine Nullmenge.