Tutorien am 20. / 21. Januar

Aufgabe 1:

(i) Es sei

$$A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x, y > 0,\, 0 < xy < 3,\, x < y < 2x\}.$$

Skizziere A und berechne mittels der Transformation $(x,y) = (\sqrt{\frac{s}{t}}, \sqrt{st})$ sowohl das Volumen von A als auch das Integral

$$\int_A y^2 d(x,y).$$

(ii) Es sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(r,\phi) = r(\cos(\phi), \sin(\phi))$ (Polarkoordinaten) und es sei $A := g(M)$ mit

$$M := \{(r,\phi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le r \le a(1 - \cos(\phi))\}$$

für ein $a > 0$. Skizziere A und bestimme den Flächeninhalt von A.

Aufgabe 2:

(i) Bestimme das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$.

(ii) Bestimme den Schwerpunkt von

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 + z^2 < 1, x, y, z > 0\}.$$

(Erinnerung: Die i-te Koordinate des Schwerpunktes einer Menge $A \subset \mathbb{R}^d$ ist gegeben durch $\frac{1}{V(A)} \int_A x_i dx$, $i = 1, \ldots, d$.)

(iii) Bestimme für $a, b, c > 0$ das Volumen des Ellipsoids

$$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1\}.$$

Aufgabe 3:
Es seien $0 < R_1 < R_2$. Skizziere den Torus

$$T := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (\sqrt{x^2 + y^2} - R_2)^2 + z^2 \le R_1^2\}$$

und berechne dessen Volumen.