Tutorien am 3. / 4. Februar

Aufgabe 1:
Verifiziere den Satz von Gauß für

$(o)\quad v(x,y,z)=(z^2,y,xz)\quad$ und $\quad G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2\le z^2,\,0\le z\le 1\}$

und für

$(oo)\quad v(x,y,z)=(-y,x,1+z)\quad$ und $\quad G=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,|\,x^2+y^2+z^2\le R^2,\,z\ge 0\}$.

Erinnerung: $\int\sin^2(x)dx=\frac{x}{2}-\frac{\sin(2x)}{4}$.

Aufgabe 2:

(1) Sei $G\subset\mathbb{R}^d$ ein zulässiges Gebiet. Zeige, daß für das Volumen $V(G)$ gilt

$$V(G)=\frac{1}{d}\int_{\partial G}x\cdot n\,do.$$

(2) Zeige, daß zwischen dem Volumen $V(B_r)$ der Kugel $B_r=\{x\in\mathbb{R}^3\mid|x|\le r\}$ und dem Flächeninhalt $A(S_r)$ der Sphäre $S_r=\{x\in\mathbb{R}^3\mid|x|=r\}$ der Zusammenhang

$$\frac{3}{r}V(B_r)=A(S_r)$$

besteht.

Aufgabe 3:

-A- Beweise den Satz von Green:
Es sei $G\subset\mathbb{R}^2$ ein zulässiges Gebiet, $p,q:\overline{G}\to\mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $v=(p,q)$. Dann gilt:

$$\int_G\Big(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\Big)d(x,y)\;=\;\int_{\partial G}v\vec{ds},$$

wobei hier die Randkurve von G, über den das Vektorfeld v integriert wird, im mathematisch positiven Sinn, d.h. gegen den Uhrzeigersinn, durchlaufen wird.

-B- Finde mindestens ein Vektorfeld $v=(p,q)$ mit $\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}=1$.

-C- Bestimme den Flächeninhalt der Astroide, die durch die Kurve $(\cos^3(t),\sin^3(t))$, $t\in[0,2\pi]$ begrenzt wird.
Hinweis: Es ist $\int\cos^4(t)\sin^2(t)dt=\frac{1}{192}(12t+3\sin(2t)-3\sin(4t)-\sin(6t))$.