Tutorien am 10. / 11. Februar

Mit diesen Aufgaben kann man vor allem nochmals viele wichtige Rechentechniken üben, die in diesem Semester wichtig waren. In der Klausur wird es durchaus auch theoretischere Aufgaben geben.

Aufgabe 1:
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $f(x) = Ax + x\psi(x)$, wobei $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig sei mit $\psi(0) = 0$. Zeige, daß f im Punkt $x = 0$ differenzierbar ist und bestimme $f'(0)$.

Aufgabe 2:
Bestimme die lokalen Extrema von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = (y^2 - 1)\sin(x).$$

Aufgabe 3:
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (ay, bx)$ gegeben, wobei $a, b \neq 0$. Bestimme alle Punkte, in denen f lokal invertierbar ist und gib jeweils die Ableitung der Umkehrfunktion an diesen Punkten an.

Aufgabe 4:
Es sei $v(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}\binom{y}{x}$ auf $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. Integriere v über die durch folgende Parametrisierungen gegebenen Kurven:

$$(a)\ c_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad c_1(t) = (-\cos(2\pi t), \sin(2\pi t)),$$
$$(b)\ c_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad c_2(t) = (t(t-1), \cos(8\pi t^5) + 3),$$

Aufgabe 5:
Berechne die folgenden Integrale $\int_B f dx$ mit Hilfe geeigneter Koordinaten.

(a) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 16, x \geq 0, y \geq 0\}$, $\quad f(x, y) = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$,

(b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$, $\quad f(x, y, z) = ze^{x^2+y^2} + z^2$,

(c) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + z^2 \leq 4, 6 \leq y \leq 8\}$, $\quad f(x, y, z) = \sin(x^2 + z^2)$.

Aufgabe 6:
Ermittle das Volumen des Körpers, den der elliptische Zylinder

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2/9 + y^2/4 \leq 1/2\}$$

aus dem Ellipsoid

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2/9 + y^2/4 + z^2 \leq 1\}$$

ausschneidet.

Aufgabe 7:
Berechne die Oberfläche der Wendelfläche W, die als Bild der Abbildung $p : [0,1] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $p(r, \phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi, \phi)$ gegeben ist.

Aufgabe 8:
Berechne mit Hilfe des Satzes von Gauß den Fluß des Vektorfeldes $v(x, y, z) = (2xy, z^2 - y^2, x - z)$ durch die Oberfläche des Körpers

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 3\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 10 - x^2 - y^2\}.$$