Tutorien am 11. / 12. November

Aufgabe 1:
Es sei $X := \{a, b, c, d\}$ und $\mathcal{O} := \big\{\emptyset, X, \{a\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, c, d\}\big\}$. Zeige, daß $\mathcal{O}$ eine Topologie auf X definiert.
Welche der Mengen $\{b\}, \{d\}, \{b, d\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}$ sind abgeschlossen?
Ist $(X, \mathcal{O})$ ein Hausdorffraum?

Aufgabe 2:

(i) Mache Dir klar, daß auf einer Menge X jede Metrik d eine Topologie $\mathcal{O}$ induziert via
$$\mathcal{O} := \{U \subset X \,|\, U \text{ ist offen bezüglich } d\}.$$

(ii) Es sei $X = Y = [0, 1]$ und $\mathcal{O}_Y = \mathcal{P}(Y)$ die diskrete Topologie auf Y, $\mathcal{O}_X = \{\emptyset, X\}$ die triviale Topologie auf X. Zeige, daß $f : X \to Y$ genau dann stetig ist, falls f konstant ist.

Aufgabe 3:

(i) Es sei
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) := \begin{pmatrix} \sqrt{3}x^2 + \cos(4x - 2y) \\ \sqrt{3}y^2 + \sin(3x + 5y) \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
Bestimme die Funktionalmatrix von f. Ist f (total) differenzierbar?

(ii) Es sei
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x, y) := \sin(x + y) + \cos(y) + x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$
Bestimme die Funktionalmatrix von g. Bestimme weiterhin die Richtungsableitung von g im Punkt $(\pi/2, 0)$ in Richtung
$(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$.

Aufgabe 4:

(i) Es sei

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) := \begin{pmatrix} x + x^2 y \\ 1 + y \end{pmatrix} = (x + x^2 y, 1 + y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Zeige mit der Definition, daß f im Punkt $(0,0)$ (total) differenzierbar ist. Ist f auf ganz $\mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar? Stetig partiell differenzierbar? (Total) differenzierbar? Berechne gegebenenfalls die Funktionalmatrix von f.

(ii) Es sei

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, daß g im Punkt $(0,0)$ partiell differenzierbar ist, aber nicht differenzierbar ist. Ist f in $(0,0)$ stetig?